MŰSZAKI MATEMATIKAI GYAKORLATOK

SZERKESZTI:
DR. FAZEKAS FERENC

A. V.**
HATÁROZOTT INTEGRÁL

(MÁSODIK RÉSZ)

ÍRTA:
DR. FAZEKAS FERENC

HARMADIK KIADÁS

TANKÖNYVKIADÓ

MŰSZAKI MATEMATIKAI GYAKORLATOK

SZERKESZTI:
DR. FAZEKAS FERENC
EGYETEMI DOCENS

BELSŐ MUNKATÁRSAK:

DR. FREY TAMÁS
EGYETEMI TANÁR,
A MATEMATIKAI TUDOMÁNYOK DOKTORA

DR. BAJCSAY PÁL
EGYETEMI DOCENS,
KANDIDÁTUS

SZEMLÉLTETÉS:
GYURCSY ENDRE
OKL. VILLAMOSMÉRNÖK

NEM
KÖLCSÖNÖZHETŐ

TANKÖNYVKIADÓ, BUDAPEST
1974

A
MŰSZAKI MATEMATIKAI GYAKORLATOK
SOROZAT KÖTETEI:

A.

A.	I.	**Középiskolai matematika** (Ötödik kiadás)
A.	II.	**Egyváltozós elemi függvények** (Harmadik kiadás)
A.	III.	**Differenciálszámítás** (Harmadik kiadás)
A.	IV.	**Határozatlan integrál** (Negyedik kiadás)
A.	V.*	**Határozott integrál** (Első rész) (Negyedik kiadás)
A.	V.**	**Határozott integrál** (Második rész) (Harmadik kiadás)
A.	VI.	**Többváltozós függvények és differenciálásuk** (Negyedik kiadás)
A.	VII.	**Többváltozós függvények integrálása** (Negyedik kiadás)
A.	VIII.	**Taylor-sorok** (Harmadik kiadás)
A.	IX.	**Vektoralgebra. Lineáris egyenletrendszerek** (Negyedik kiadás)
A.	X.*	**A logarléc** (Hatodik kiadás)

B.

B.	I—II—III.	**Vektoranalízis** (Térgörbék és felületek differenciálgeometriája. Skalár-, vektor és tenzormezők) (Harmadik kiadás)
B.	IV.	**Komplex függvénytan** (Negyedik kiadás)
B.	V.	**Numerikus és grafikus közelítő módszerek** (Második kiadás)
B.	VI.	**Végtelen sorozatok, sorok és szorzatok** (Harmadik kiadás)
B.	VII.*	**Közönséges differenciálegyenletek** (Első rész) (Ötödik kiadás)
B.	VII.**	**Közönséges differenciálegyenletek** (Második rész) (Harmadik kiadás)
B.	VIII.	**Parciális differenciálegyenletek** (Második kiadás)

C.

C.	I.	**Operátorszámítás. Speciális függvények** (Második kiadás)
C.	II.	**Variációszámítás** (Harmadik kiadás)
C.	III.	**Integrálegyenletek** (Harmadik kiadás)
C.	IV.	**Mátrixszámítás** (Negyedik kiadás)
C.	V.	**Valószínűségszámítás** (Harmadik kiadás)
C.	VI.	**Matematikai összefoglaló** (Harmadik kiadás)
C.	VII.	**Matematikai programozás** (Második kiadás)

(A szövegben az egyes kötetekre a fenti betű- és számjelzéssel hivatkozunk.)

A. V.**

HATÁROZOTT INTEGRÁL

(MÁSODIK RÉSZ)

ÍRTA:
DR. FAZEKAS FERENC
EGYETEMI DOCENS

KÖZREMŰKÖDÖTT:
SZABÓ ISTVÁN
V. EGYETEMI TANÁRSEGÉD
TUD. KUTATÓ

Harmadik kiadás

EGYETEMI SEGÉDKÖNYV

Az első kötet kéziratát átnézte:

DR. GALLAI TIBOR

v. egyetemi tanár

A második kötet kéziratát átnézte:

DR. KÖRMENDI ISTVÁN

v. egyetemi adjunktus

Szaktanácsadó volt mindkét kötetnél:

DR. NAGY SÁNDOR †

egyetemi docens

© *Dr. Fazekas Ferenc, Budapest, 1954*

ISBN 963 17 1073 4
ISBN 963 17 0542 0

Kiadását az oktatási miniszter rendelte el

A SOROZAT ELSŐ KIADÁSÁNAK ELŐSZAVÁBÓL

A műegyetemi oktatás és mérnöki továbbképzés évtizedek óta nehezen nélkülöz egy a műszaki igényeknek megfelelő magyar matematikai példagyűjteményt. E hiányt felismerve matematikai tanszékeink lelkes fiataljai az utolsó 2—3 évben több jegyzetet állítottak össze a matematikai gyakorlatok anyagából. Tovább enyhítette a hiányt *Gjunter—Kuzmin* időközben magyarul megjelent kiváló felsőbb matematikai példatára, bár ezt — magas színvonalára való tekintettel — elsősorban nem a műegyetemi, hanem a tudományegyetemi hallgatók részére adatta ki a minisztérium. A probléma viszont teljes megoldást kívánt a hallgatók és a kezdő tanszemélyzet létszámának nagymérvű megnövekedése miatt. Ez utóbbi körülmény azt az újabb igényt támasztotta egy leendő példatárral szemben, hogy az a feladatokon és végeredményeiken kívül még bő megoldási útmutatásokat is tartalmazzon. Ugyanakkor több matematikai értekezleten szorgalmazták, a legmeggyőzőbben *dr. Alexits* akadémikus professzor, hogy műszaki egyetemeinken *alkalmazott, műszaki matematikát* oktassunk, és gyűjtsünk össze megfelelő alkalmazott műszaki anyagot.

A minisztérium figyelmét ekkor felhívták néhány lelkes hallgató társaságában már korábban s hasonló szempontok szerint elindított gyűjtő munkámra. A minisztérium azonnal felkarolta kezdeményezésemet, megbízott egy *Műszaki Matematikai Gyakorlatok* című példagyűjtemény terveinek, szerkesztési elveinek kidolgozásával, majd rövidesen a mű szerkesztésével — egyúttal biztosítva több matematikai tanszék néhány tapasztaltabb adjunktusának, illetve tanársegédjének közreműködését.

Munkánk A. és *B.** része jórészt a matematikának a műszaki felsőoktatásban világszerte szokásossá vált fejezeteit tárgyalja, de a megszokott keretekhez képest egyeseket kibővítve, főleg a *B.* részben a klasszikus műszaki matematika érintett fejezeteit. A sorozat *C.* része a modern műszaki matematika néhány olyan nagy jelentőségű fejezetébe nyújt bevezetést, amelyek bevonulása műszaki felsőoktatásunkba az utóbbi években megkezdődött.

Munkánk első célja, a szokásos tananyaggal kapcsolatban mindazt előadni, aminek műszaki egyetemeinken a helyesen, korszerűen, a műszaki igényeknek megfelelően vezetett matematikai gyakorlatokon szerepelnie kell. Esti és levelező oktatásunkban idevágó füzeteink esetleg még szélesebb körű felhasználásra is kerülhetnek

Munkánk második (de nem mellékes) *célja,* gyakorlati és műszaki anyagot nyújtani a különböző tagozatokon a felsőbb éves nappali és esti hallgatók speciális matematikai oktatásához, a szakmérnöki továbbképző tanfolyamok és a *Mérnöki Továbbképző Intézet* rendszeres matematikai oktatásához, továbbá az igényesebb hallgatók, a fiatal matematikai és műszaki tanszemélyzet, a kutató és üzemi mérnökök és aspiránsok egyéni vagy csoportos továbbtanulásához.

E példagyűjteménynél viszonylag újszerűnek mondható célkitűzések megvalósítása szintén *újszerű szerkesztési elveket* kívánt. Ennek megfelelően nem szorítkoztunk, mint a legtöbb példatár, csupán feladatok és végeredményeik közlésére. Ellenkezőleg, megkíséreltük fejezetről fejezetre végigvezetni a következő rendszert: *a)* elméleti összefoglaló; *b)* bő magyarázat kíséretében részletesen megoldott, kisszámú jellegzetes mintapélda; *c)* az előbbiek alapján könnyen megoldható, csak végeredménnyel ellátott, nagyszámú gyakorló feladat; *d)* esetleg rövid útmutatással ellátott és csak vázlatosan megoldott különleges (csillagos) példák; *e)* esetleg egyes bizonyítások vázlatos közlése a különleges példák között; *f)* végül műszaki alkalmazások bemutatása. E láncszemek véleményünk szerint jól szolgálhatják a matematikai elmélet és a műszaki gyakorlat összekapcsolásának ügyét. E szerkesztési elvek legtapasztaltabb professzoraink helyeslésével találkoztak, továbbá egészen új szovjet példatárakban észleltünk többé-kevésbé hasonló szerkesztési elveket. Megjegyzendő, hogy bizonyára nem mindenütt sikerült e rendszert teljes egészében megvalósítanunk; olykor e sorrendtől is eltérünk.

Az *A. rész füzeteiben,* professzorainkkal egyetértésben, eléggé óvatosan méreteztük a műszaki alkalmazások számát a többi példákéhoz képest. Erre késztetett az elsőéves hallgatók műszaki ismereteinek hiányossága, valamint az e füzetekben közölt matematikai apparátus elégtelensége komolyabb problémák megoldásához. Még így is lényegesen bővebb műszaki példaanyagunk, mint az ismert példatáraké.

---

* A sorozat köteteinek címjegyzékét lásd a 2. oldalon!

A *B.* és *C. részfüzeteiben* — az olvasó egyre növekvő matematikai és műszaki ismereteire támaszkodva— nagy bőségben tárgyalunk problémákat a klasszikus és modern műszaki matematika legkülönbözőbb területéről, amelyekben kézzelfoghatóan jelentkezik a matematika és a technika egysége.

Közismert tény, hogy a híressé vált külföldi példatárak legtöbbje évtizedek alatt számos kiadás folyamán forrt ki, tökéletesedett. E viszonylag újszerű célkitűzésekkel készülő példatár fiatal szerzői tehát érthetően sok-sok *észrevételt,* megjegyzést, tanácsot várnak és kérnek ezúton is a olvasóktól, hogy a sorozat kitűzött céljának minél hamarabb és minél teljesebb mértékben megfeleljen.

A minisztérium és professzoraink tanácsát követve, bátran merítettünk a legkülönbözőbb jó *forrásokból,* sokkal inkább törekedve az anyag gazdagságára, és megbízhatóságára, mintsem—példatárnál amúgy is szegényes sikert ígérő — eredetiségre. Természetesen szép számú új feladatot is készítettünk.

A szemléltető anyag gondos szerkesztése és megrajzolása *Gyurcsy Endre* okl. villamosmérnök kolléga érdeme.

E sorozat megszületését megkönnyítette az a körülmény, hogy a minisztérium egyetemi tankönyvosztálya egy ilyen mű szükségességét, jelentőségét és elvi vonatkozásait igen világosan látta, és másokkal is meg tudta értetni.

Ki kell emelnem *Egerváry* akadémikus professzor számos szakmai megjegyzését és műegyetemi előadásait, amelyekből merített tanulságok nagymértékben emelik munkánk értékét. Állandó érdeklődésével és gazdag pedagógiai és módszertani útmutatásokkal volt segítségünkre *Gallai* professzor. Meg kell emlékeznem az *Alkalmazott Matematikai Intézetről,* mely modern könyvtárával és alkotó légkörével a gyűjtés legelejétől mindvégig támogatta munkánkat.

Köszönettel tartozom a *Tankönyvkiadó Vállalatnak,* különösképpen a *műszaki szerkesztőségnek,* mely értékes segítséget nyújtott nekünk e nyomdailag nagy követelményeket támasztó sorozat műszaki munkálataival kapcsolatban.

Végezetül *munkánkat műszaki egyetemeink tanszemélyzetének és hallgatóinak ajánljuk.* Használják fel e füzeteket a maguk, illetve a leendő mérnökök ezreinek képzésére! Észrevételeikkel segítsék elő e gyűjtemény mielőbbi tökéletesedését!

Budapest, 1952. szeptember 1.

A SZERKESZTŐ

ELŐSZÓ A SOROZAT MÁSODIK KIADÁSÁHOZ

Közel nyolc év munkájával — néhány kisebb jelentőségű módosítástól eltekintve az eredeti terv szerint — sikerült befejeznünk a *Műszaki Matematikai Gyakorlatok* c. sorozatot 23 kötetben. Munkaközösségünk céltudatossága és munkakedve, a *minisztérium* és a *Tankönyvkiadó* kitartó támogatása, bírálóink értékes segítsége és nem utolsósorban egyre növekvő olvasótáborunk lelkes érdeklődése lehetővé tette az összes nehézségek leküzdését. Noha távolról sem tekintjük tökéletesnek, véglegesnek könyveinket, mégis az első kiadás befejezésekor a magyar műszaki matematikai felsőoktatás érdekében végzett odaadó munka jó érzése tölti el munkaközösségünket.

Könyveinket a hazai szakemberek és szaklapok kedvezően fogadták, és számos hasznos észrevétellel, tanáccsal voltak segítségünkre. Köteteink az évek során több keleti és nyugati államba is eljutottak. Ez év nyarán pedig abban a megtiszteltetésben részesültünk, hogy a *belgiumi Nemzetközi Mérnöki Matematikai Kongresszus* vezetősége kiállította és idegen nyelvű, vetített képes előadásban is bemutatta a teljes sorozatot, figyelemre méltó érdeklődés és elismerés mellett.

Most, a második kiadás során a sorozat fejlesztésének, korszerűsítésének — a megalkotásánál semmivel sem könnyebb — munkája vár ránk. Természetesen az első kiadás munkálatai során szerzett gazdag tapasztalataink, az újabb hazai és külföldi szakirodalom tanulmányozása, továbbá a könyveinkről kapott hazai és külföldi észrevételek jelentős segítségünkre lesznek. Remélhetőleg módunk lesz a műszaki matematikának néhány újabb diszciplínáját is feldolgozni a sorozatban.

Amikor munkaközösségünk változatlan céltudatosságáról és munkakedvéről biztosíthatom a ma-

gyar műszaki matematika híveit, egyben ismét kérem bírálóink, olvasóink valamint a *Minisztérium* és a *Tankönyvkiadó* további szakmai, erkölcsi és anyagi támogatását, nemkülönben az *Egyetemi Nyomda* ismert színvonalú munkáját.

Budapest, 1958. szeptember 1.

A SZERKESZTŐ

ELŐSZÓ A SOROZAT HARMADIK KIADÁSÁHOZ

1963-ban szükségessé vált a sorozat harmadik kiadásának megindítása, a második kiadás lendületes folytatása mellett. A harmadik kiadás egyrészt olyan hagyományos, de széles körben érdekes tárgyú kötetekkel kezdődött meg, mint az A. I. és A. X., másrészt olyan modern alkalmazási területű és emiatt mindinkább keresetté vált kötetekkel az A. IX., B. I—II—III., B. IV. és B. VII.

Az említett második kiadás igen gyors elfogyása — éppen a matematikai programozás lineáris algebrai segédeszközeivel, ill. a síkbeli rugalmasságtan korszerű, komplex függvénytani módszerével kapcsolatos bővítés után — kézzelfoghatóan bizonyítja a sorozat második kiadásának elősz avában kitűzött fejlesztési tervek és a megvalósításukra kifejtett erőfeszítések helyességét.

E körülmény buzdítás munkaközösségünk részére és megnyugtatás a kiadó számára is, látván, hogy újabb áldozatai hasznos célt és reális igényeket szolgálnak.

Említésre méltó, hogy sorozatunk vagy egyes kötetei 1958 óta több újabb külországban (pl. Szovjetunióban, NDK-ban, Jugoszláviában, Egyiptomban, USA-ban, Angliában, NSZK-ban) és nemzetközi fórumon (pl. NDK Matematikai Társulatának 1963. évi nemzetközi ülésszakán) tudtak helytállni és versengeni a hasonló rendeltetésű külföldi munkákkal.

Ilyen kedvező adottságok között természetes, hogy lelkesen folytatjuk a sorozat fejlesztésének, korszerűsítésének nagy munkáját, kérve ehhez a minisztérium, a kiadó és nem utolsósorban műszaki olvasótáborunk buzdító, áldozatkész támogatását.

Budapest, 1964. febr. 15.

A SZERKESZTŐ

A KÖTET ELSŐ KIADÁSÁNAK ELŐSZAVA

E kétkötetes könyv kitüntetett szerepet játszik sorozatunk A. részének kötetei között — több okból.

Először: a határozott integrál fogalma és néhány olyan geometriai alkalmazása, mint pl. a terület-, ívhossz-, térfogat-, felszín- és nyomatékszámítás stb. nálunk és külföldön egyaránt *fontos részét képezi a műszaki felsőoktatás matematikai anyagának.* Ezért ezt az anyagot könyvünkben alapos elméleti összefoglalókkal és nagyszámú, erősen rendszerezett példával tárgyaljuk.

Másodszor: a határozott integrál — a differenciálelv, valamint (az A. IV. kötetben említett) legegyszerűbb differenciálegyenletek ismeretében — már számtalan apróbb műszaki részletprobléma, sok esetben egész problémák, sőt olykor széles műszaki problémakörök megoldására is alkalmas. E tényt meggyőzően szemlélteti könyvünkben a legkülönbözőbb műszaki tudományok területéről összegyűjtött gazdag példaanyag. *Didaktikai és elvi szempontból* egyaránt jelentős, hogy e műszaki példák a fentebb említett matematikai eszközöket *szoros összefüggésükben* mutatják meg, s ezek együttesét mint *az elemi műszaki matematika leghathatósabb eszközét* vésik az olvasó emlékezetébe. Megjegyzendő, hogy a szélesebb műszaki problémakörök feldolgozásánál szükségesnek látszott bővebb műszaki bevezetés előrebocsátása.

Harmadszor: könyvünk bizonyos fejezetei (mint pl. az improprius, a paraméteres és a *Stieltjes*-integrálról szóló) előre mutatnak, s *a sorozat későbbi kötetei* (B. III—VII., C. I—V.) *számára* kívánnak *a határozott integrállal kapcsolatos további ismereteket* nyújtani. E fejezetek gazdag példaanyaga egyébként szinte hézagpótló tankönyvirodalmunkban.

Mindezek következtében könyvünk eddigi köteteinknél *nagyobb mértékben szolgálhatja a sorozat általános célkitűzéseit.* (L. ezeket a sorozat előszavában.)

Néhány szót a *szerkesztésről!* Viszonylag nagy irodalmat tanulmányoztunk át (l. az irodalomjegyzéket). Hosszadalmas munkát igényelt (s bizonyára még így sem sikerült kifogástalanul) a sokfelől összegyűjtött anyag rendszerezése, egységes feldolgozása, nagyszámú példa átdolgozása és kiszámítása.

A *források* közül kiemeljük *Fihtengolc* gyakran idézett háromkötetes, ragyogó művét, melyből mind az elméleti bevezetők, mind a példák tekintetében bőven merítettünk, különösen három utolsó fejezetünkben. Jelentősen felhasználtuk továbbá elméleti, példa- és ábraanyag tekintetében *Berman, Bermant, Gjunter—Kuzmin, Schlömilch, Granville, Rényi, Bojev, Muttnyánszky, Kövesi, Jablonszkij, Ivanov, Kalantarov—Nejman* idézett műveit.

Viszonylag sokan voltak segítségemre a szerkesztés során. Közreműködött fáradhatatlan szorgalommal *Szabó István* tanársegéd, az összegyűjtött anyag rendezésében, a kézirat előkészítésében és a korrektúrában. *Gallai* professzornak főleg az elméleti és példaanyag aránya, elrendezése, tárgyalásmódja és összefüggése tekintetében adott tanácsaiért, *Körmendi* adjunktusnak a matematikai és műszaki precizitást célzó számos megjegyzéséért, *Nagy Sándor* docensnek műszaki példáiért és hasznos észrevételeiért kell köszönetet mondanom. Ugyancsak köszönet illeti *Aczél* tv. docenst és *Makai* docenst, az első kézirattal kapcsolatos megjegyzéseiért. *Hock* tanársegéd a víztagozat szaktárgyaiból gyűjtött példáiért, *Gyurcsy* okl. vill. mérnök a pontos és szemléletes ábrákért, *Gedeon* és *Géher* tanársegédek a segédanyagfordításokért, *Biczó* tanársegéd a gépelési munkálatokért fogadják köszönetemet. Hálásan emlékezem meg az *Oktatásügyi Minisztérium*ról és a *Tankönyvkiadó Vállalat*ról, a munka közben nyújtott állandó támogatásért és a könyv megjelenése érdekében hozott jelentős áldozatért. Az *Egyetemi Nyomda* most is elismerésre méltó munkával oldotta meg a nagy igényű feladatát.

Budapest, 1953. nov. 15.

FAZEKAS FERENC

A KÖTET MÁSODIK ÉS HARMADIK KIADÁSÁNAK ELŐSZAVA

A szerző örömére szolgál, hogy e kötet, mely a sorozat A. részében kétségtelenül a leggazdagabb műszaki alkalmazási anyagot tartalmazza, s ennélfogva az oktatás mellett a műszaki kutató munkához is számottevő segítséget tud nyújtani, újra műszaki olvasótáborunk kezébe kerül.

A jelen kiadásban nem volt mód érdemi változtatásra, a jövőre nézve azonban felmerült a Határozott integrál (két kötet) anyaga bizonyos mértékű módosításának terve, pl. (akár egyes részek rövidítése árán is) a *Lebesgue*-integrál (az L^1- és L^2-függvénytér) beiktatásával, hiszen ez már több modern műszaki diszciplína matematikai apparátusának részét képezi.

Sorozatunk harmadik és negyedik kiadásának lendületes folyamata kézzelfoghatóan bizonyítja műszaki életünk elméleti igényességének növekedését, s ezzel eltökéltségét is a műszaki világversenyben való tisztes helytállásra. Jóleső érzés számunkra, hogy technikánknak e nemes vetélkedésben könyveinkkel mi is segítségére lehetünk.

Budapest, 1966. febr. 15., 1972. szept. 15.

DR. FAZEKAS FERENC

E KÖTET

TARTALOMJEGYZÉKE

(MÁSODIK RÉSZ)

7. §. Első- és másodrendű nyomaték stb. (Szilárdságtani alkalmazások) 13

a) Síkbeli tömegrendszer nyomatékai 13
α) Elsőrendű nyomaték, súlypont 13
β) Másodrendű nyomaték 13

b) Folytonos homogén tömegeloszlás nyomatékai 14
α) Általános megjegyzések 14

c) Folytonos homogén tömegeloszlás elsőrendű vagy statikai nyomatéka 15
α) Homogén síkrész elsőrendű nyomatéka 15
β) Homogén görbedarab elsőrendű nyomatéka 17
γ) Homogén forgástest elsőrendű nyomatéka 18
δ) Homogén forgásfelület elsőrendű nyomatéka 19
ε) Speciális homogén térbeli alakzatok elsőrendű nyomatéka 19

Példák és feladatok 19

MŰSZAKI ALKALMAZÁSOK

1. A képlékeny réteg vastagsága csavart hengerben 36

d) Guldin tételei 37
α) Első tétel 38
β) Második tétel 38

Példák és feladatok 39

e) Folytonos homogén tömegeloszlás másodrendű vagy tehetetlenségi (inercia-) nyomatéka 41
α) Homogén síkrész másodrendű nyomatéka 41
β) Homogén görbedarab másodrendű nyomatéka 43
γ) Homogén forgástest másodrendű nyomatéka 44
δ) Homogén forgásfelület másodrendű nyomatéka 44
ε) Speciális homogén térbeli alakzat másodrendű nyomatéka 44
ζ) *Steiner* tétele 44

Példák és feladatok 45

MŰSZAKI ALKALMAZÁSOK

1. Pörgettyű tehetetlenségi nyomatéka. **2.** Autó viszonylagos mozgása forgó pályán. **3.** Egyik végén befogott tartó lehajlása. **4—5.** Feladatok egyenszilárdságú tartókkal kapcsolatban. **6.** Fatörzs kitérése szélnyomás hatására. **7—13.** Feladatok forgó test kinetikus energiájának meghatározására. **14—44.** Feladatok különféle szögvasszelvények másodrendű nyomatékának meghatározására . . . 58

f) Erő statikai (forgató) nyomatéka 72
α) Erő statikai nyomatéka. Nyomatéki tétel 72
β) Nyomatéki ábra 73
γ) Megoszló terhelésű kéttámaszú rudak 77

Példák és feladatok 78

g) A hajlított rudakról 82
α) Tiszta hajlítás 82
β) Egyidejű hajlítás és nyírás 84
γ) A rugalmas szál egyenlete 86
δ) A hajlított rudak méretezése 86
ε) A rugalmas szál szerkesztése 88

Példák és feladatok 90

8. §. Egyéb nyomatékok stb. (Hidromechanikai és egyéb alkalmazások) 103

a) Folyadék nyomóereje edény falára 103
α) Függélyes sík falra 103
β) Ferde sík falra 105
γ) Görbe falra 106
δ) *Archimedes* törvénye 110

Példák és feladatok 112

b) Folyadék kiömlése edény nyílásán 127
α) Kiömlés vízszintes nyíláson 127
β) Kiömlés függőleges nyíláson 131
γ) Kifolyás zsilipeken és bukógátakon 138

Példák és feladatok 139

c) Egyéb hidromechanikai alkalmazások 165
α) A folyadékfelszín alakja forgó tartályban 165
β) Folyadék kiszivattyúzása tartályból 167
γ) Víz áramlása a talajban. Kút vízhozama 168

Példák és feladatok 169

d) Térerősség, potenciál, erő, munka stb. 178
α) Az *n*-edrendű nyomaték 178
β) Térerősség, potenciál 178
γ) Vonzóerő és munkája 179
δ) Változó erő munkája 179
ε) Expandáló gáz által végzett munka 180
ζ) Egyenáram mágneses tere 180
η) Megjegyzés 181

Példák és feladatok 181

9. §. Integrálás végtelen sorok segítségével 195

a) Főbb tételek 195
α) Végtelen függvénysor tagonkénti integrálhatóságának feltételei 195
β) Végtelen hatványsor integrálása 196

Példa 196

b) Gyakorlati megjegyzések 197
α) Sorfejtés a derivált felhasználásával 197
β) Integrálás *Taylor*-sor segítségével 198
γ) Speciális sorok 198

Példák és feladatok 199

10. §. Improprius integrálok 209

a) Végtelen határú improprius integrálok 209
α) Határozott integrálás végtelen szakaszon 209
β) Az improprius integrál létezésének feltételei és kritériumai 211

Példák és feladatok 214

b) Nem korlátos függvények improprius integrálja 221
α) Nem korlátos függvények határozott integrálja 221
β) Az integrál létezésének feltételei és kritériumai 222

Példák és feladatok 224

MŰSZAKI ALKALMAZÁS

Vékony szárnymetszetek *Birnbaum*-féle számítása 231

c) Az improprius integrálok sajátságai. Néhány különleges integrál 234
α) Az improprius és közönséges integrálok néhány közös tulajdonsága 234
β) Középértéktételek 235
γ) Parciális integrálás improprius integrálok esetén 236
δ) Helyettesítés improprius integrálok esetén 236
ε) Improprius integrálok meghatározása közelítő összegek segítségével 236
ζ) *Froullani* integrálja 237
η) Néhány különleges integrál 239

Példák és feladatok 239

d) Valószínűségi változók és eloszlásfüggvényeik 246
α) Bevezetés 246
β) Néhány alapfogalom 246
γ) Eloszlás- és egyéb függvények. Példák 247

MŰSZAKI ALKALMAZÁSOK

1. Elektromos áramkör kikapcsolási hője. **2.** Adiabatikus munka. **3.** Elektroneloszlási függvény 252

Függelék

11. §. Paraméteres integrálok 254

a) A paraméteres integrál fogalma és főbb tételei 254
α) A feladat megfogalmazása 254
β) Határátmenet, összetartás 254
γ) Differenciálás az integrál jele alatt 256
δ) Integrálás az integrál jele alatt 256
ε) Az integrál határai a paraméter függvényei 257
ζ) Az integrálandó egyik tényezője csak x függvénye 257

Példák és feladatok 258

b) Improprius paraméteres integrálok egyenletes konvergenciája 264
α) Integrálok egyenletes konvergenciájának fogalma 264
β) Az egyenletes konvergencia feltételei. Kapcsolat a sorokkal 265
γ) Az egyenletes konvergencia elégséges kritériumai 265
δ) Az egyenletes konvergencia másik esete 267

Példák és feladatok 268

c) Integrálok egyenletes konvergenciájának felhasználása 271
α) Határátmenet az integrál jele alatt 271
β) Integrálok paraméter szerinti folytonossága és differenciálhatósága 272
γ) Integrálok paraméter szerinti integrálhatósága 273
δ) Nevezetes integrálok 274

Példák és feladatok 274

MŰSZAKI ALKALMAZÁS

Jelsorozat berezgési ideje 290

12. §. Stieltjes-integrál 291
a) A Stieltjes-integrál fogalma 291
b) A Stieltjes-integrál létezésének általános feltétele és létezési eseteinek osztályozása 292
α) Az integrál létezésének feltétele 292
β) A *Stieltjes*-integrál létezési eseteinek osztályozása 292
c) A Stieltjes-integrál sajátságai. Parciális integrálás 293
α) Főbb sajátságok 293
β) Parciális integrálás 294
d) Stieltjes-integrálok kiszámítása 294

Példák 295

MŰSZAKI ALKALMAZÁSOK

1. Folytonos és pontszerű vonal menti tömegeloszlás nyomatékai. **2.** Megoszló és koncentrált erőkkel terhelt kéttámaszú tartó nyíróerő- és hajlító nyomatéki ábrája 297

e) Valószínűségi változók jellemzői 299
α) Bevezetés 299
β) Várható érték. Példák 299
γ) Szórás. Példák 304

EREDMÉNYTÁR

7. §. eredményei 308
8. §. eredményei 317
9. §. eredményei 320
10. §. eredményei 320
Függelék eredményei 322

FELHASZNÁLT IRODALOM

7. §. ELSŐ- ÉS MÁSODRENDŰ NYOMATÉK STB.

(SZILÁRDSÁGTANI ALKALMAZÁSOK)

a) Síkbeli tömegpontrendszer nyomatékai

α) Elsőrendű nyomaték, súlypont

Legyen *adva az* (x, y) *síkban* egy *tömegpontrendszer, azaz* $m_1, m_2, \ldots, m_n$ *tömegpontok a* $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \ldots P_n(x_n, y_n)$ *helyeken.* Az m_i *tömegpontra* vonatkozó

$$m_i x_i, \quad \text{illetve} \quad m_i y_i$$

szorzatot e tömegpont y tengelyre, illetve x tengelyre vonatkozó elsőrendű vagy statikai nyomatékának, *a teljes pontrendszerre vonatkozó*

$$M_y = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i, \quad \text{illetve} \quad M_x = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i$$

összeget a síkbeli pontrendszer y tengelyre, illetve x tengelyre vonatkozó elsőrendű vagy statikai nyomatékának, végül *az*

$$x_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{M_y}{m}, \quad \text{illetve} \quad y_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{M_x}{m}$$

hányadost a síkbeli pontrendszer S (tömegközéppontja vagy szokásosabb elnevezéssel) súlypontja koordinátáinak nevezzük. Az

$$m x_s = M_y, \quad \text{illetve} \quad m y_s = M_x$$

egyenlőség szerint az $S(x_s, y_s)$ súlypontba koncentrált teljes $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ tömeg elsőrendű nyomatéka — az y, illetve x tengelyre vonatkozólag — *megegyezik* az adott síkbeli tömegpontrendszernek ugyanazon tengelyre vonatkozó elsőrendű nyomatékával.

β) Másodrendű nyomaték

Az m_i *tömegpontra* vonatkozó $m_i x_i^2$, illetve $m_i y_i^2$, illetve $m_i x_i y_i$ szorzatot e tömegpont y tengelyre, illetve x tengelyre vonatkozó, illetőleg centrifugális másodrendű vagy tehetetlenségi (inercia-) nyomatékának, a *teljes tömegpontrendszerre vonatkozó*

$$I_y = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i^2, \qquad I_x = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i^2,$$

illetve

$$I_{xy} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i y_i, \qquad I_0 = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i^2 + y_i^2) = I_y + I_x$$

összegeket rendre a síkbeli pontrendszer y tengelyre, x tengelyre vonatkozó, illetve centrifugális, poláris másodrendű vagy tehetetlenségi (inercia-) nyomatékának, végül az

$$i_y = \pm\sqrt{\frac{I_x}{m}}, \qquad i_x = \pm\sqrt{\frac{I_y}{m}}, \qquad i_0 = \pm\sqrt{\frac{I_0}{m}}$$

gyököket rendre a síkbeli tömegpontrendszernek az x tengelyre, y tengelyre; illetve az origóra vonatkozó inerciasugarának nevezzük.

b) Folytonos homogén tömegeloszlás nyomatékai

α) Általános megjegyzések

α_1) *A fentebbi fogalmakat síkbeli tömegpontrendszerről most általánosítjuk folytonos homogén tömegeloszlásra,* mégpedig — mint látni fogjuk — éppen a *határozott integrál segítségével.* E fogalmakat bizonyos egydimenziós (síkgörbék), kétdimenziós (síkidomok, felületek) és háromdimenziós (testek) folytonos homogén tömegeloszlásokra fogjuk tárgyalni. Síkidomoknál és síkgörbéknél ez egyszeres integrálás útján lehetséges; viszont felületeknél és testeknél ez *általában kétszeres vagy háromszoros integrálást igényel,* s csupán néhány speciális esetben végezhető egyszeres integrálás útján.

α_2) *Az első- és másodrendű nyomaték differenciáljá*hoz úgy jutunk, hogy a homogén, vagyis állandó δ sűrűségű (a δ-t számításainkban az egyszerűség végett mindenütt 1-nek vesszük) *görbeív, terület, felszín, illetve térfogat megfelelően felvett differenciálját, elemét megszorozzuk súlyponti koordinátájával, illetve ennek négyzetével* (bizonyos esetekben inerciasugarának négyzetével) — ez utóbbiakat az illető differenciálra nézve állandónak tekintve, azaz a független változó differenciáljának magasabb hatványait figyelmen kívül hagyva.

$$\left[\text{Pl.: } \left(y + y'\frac{dx}{2}\right)\sqrt{1+y'^2}\,dx \quad \text{helyett} \quad y\sqrt{1+y'^2}\,dx.\right]$$

α_3) A fentebb elmondottak értelmében *a statikai és inercianyomaték dimenziója*

$$[M] = [m]\,[l] = \frac{\text{kg}}{\text{cm/s}^2}\,\text{cm} = \text{kg s}^2,$$

$$[I] = [m]\,[l^2] = \frac{\text{kg}}{\text{cm/s}^2}\,\text{cm}^2 = \text{kg cm s}^2.$$

Gyakorlatban olykor e nyomatékok g-szeresét használják, amelyek így már a *súlyeloszlást* is jellemzik, s dimenziójuk: kg cm, illetve kg cm^2. (L. pl. gépészetben a lendítőkerekek GD^2-ének számítását!)

Előfordul továbbá, hogy az egy-, két-, illetve háromdimenziós tömegeloszlást — anyagi jellegét teljesen figyelmen kívül hagyva (a vonalmenti, felületi, illetve térbeli sűrű-

séggel és dimenziójával való osztás útján) — e nyomatékokkal tisztán *geometriailag* jellemezzük; ekkor a dimenziók rendre

elsőrendű nyomaték esetén: cm^2, cm^3, cm^4;
másodrendű nyomaték esetén: cm^3, cm^4, cm^5.

Ez utóbbiak közül kiemeljük a *síkidomok* (geometriai) *másodrendű nyomatékát*, mely a műszaki gyakorlatban igen fontos szerepet játszik (l. pl. e § g) pontjában); ennek *dimenziója* tehát: cm^4. Bár e nyomaték a síkidomokat (pl. szögvasszelvényeket) geometriailag jellemzi, mégis a közhasználatban (pl. mérnöki zsebkönyvekben) rendszerint ezt is tehetetlenségi (inercia-) nyomatéknak nevezik.

Lássuk ezek után *képlet*einket a különböző dimenziójú alakzatok és különböző megadások esetére!

c) Folytonos homogén tömegeloszlás elsőrendű vagy statikai nyomatéka

α) Homogén síkrész elsőrendű nyomatéka

α_1) Görbe alatti terület nyomatéka. Az $y=f(x)$ explicit egyenletű görbe alatti terület $a \leqq x \leqq b$ szakasz menti darabjának statikai nyomatékát keressük, az x és y tengelyre vonatkozólag. A *nyomatékok differenciál*ja az említett szakasz $[x, x+dx]$ részszakaszán (1. ábra):

$$dM_x(x) = dT(x)\frac{y(x)}{2} = y(x)\,dx \cdot \frac{y(x)}{2} = \frac{1}{2}y^2(x)\,dx,$$

illetve

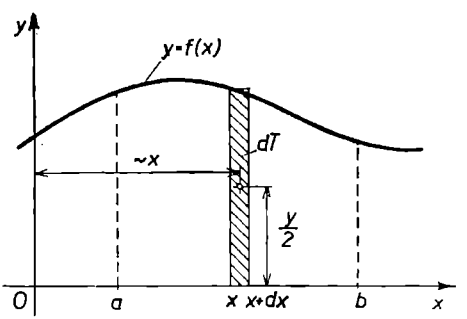
$$dM_y(x) = dT(x)x = xy(x)\,dx.$$

A keresett nyomaték tehát:

$$M_x(a, b) = \frac{1}{2}\int_a^b y^2(x)\,dx,$$

illetve

$$M_y(a, b) = \int_a^b xy(x)\,dx.$$



1. ábra

Az említett síkrész súlyponti koordinátái tehát:

$$x_s = \frac{M_y(a, b)}{T(a, b)}, \qquad y_s = \frac{M_x(a, b)}{T(a, b)},$$

ahol $T(a, b) = \int_a^b y(x)\,dx$ e síkrész *területe*.

Olykor (l. bővebben a 3. §-ban) előnyösebb az x tengellyel párhuzamos és $dT(y) = x(y)\,dy$ mérőszámú területelemekkel dolgozni. Ez esetben *a nyomatékok differenciálja:*

$$dM_x(y) = dT(y)\, y = x(y) y\, dy,$$

illetve

$$dM_y(y) = dT(y)\, \frac{x(y)}{2} = \frac{x^2(y)}{2}\, dy;$$

tehát *maguk a nyomatékok:*

$$M_x(y) = \int_A^B x(y) y\, dy,$$

illetve

$$M_y(y) = \frac{1}{2} \int_A^B x^2(y)\, dy;$$

a súlypont koordinátái pedig:

$$x_s = \frac{M_y(A, B)}{T(A, B)}, \qquad y_s = \frac{M_x(A, B)}{T(A, B)},$$

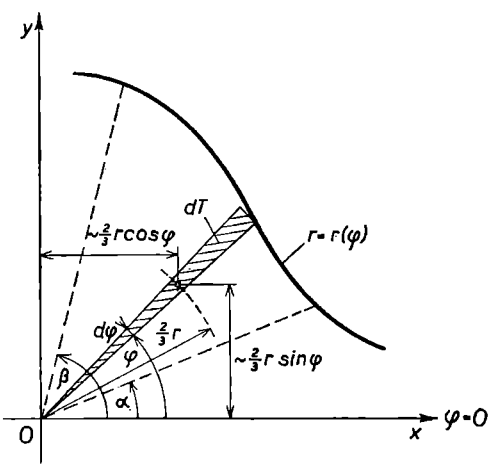
ahol $A = f(a)$ és $B = f(b)$.

A fentebbiekben hallgatólagosan feltételeztük, hogy az $y = f(x)$, illetve az $x = \varphi(y)$ függvény *egyértékű*. Többértékűség esetén értelemszerűen a görbék közti területszámítás (l. a 3. §-ban) mintájára járunk el.

Az $x = x(t)$, $y = y(t)$ paraméteres megadás esetén *képleteink* így alakulnak:

$$M_x(\gamma, \delta) = \frac{1}{2} \int_\gamma^\delta y^2(t)\, \dot{x}(t)\, dt, \qquad M_y(\gamma, \delta) = \int_\gamma^\delta x(t)\, y(t)\, \dot{x}(t)\, dt.$$

α_2) Szektorterület nyomatéka. Az $r = r(\varphi)$ poláregyenletű görbe, valamint az α és β hajlásszögű rádiuszvektorok közti síkrész statikai nyomatékát keressük a polártengelyre, illetve a rá merőleges (az origón átmenő) tengelyre vonatkozólag; nevezzük ezeket x, illetve y tengelyeknek. A *nyomaték differenciálja a* $[\varphi, \varphi + d\varphi]$ szögben (2. ábra):



2. ábra

$$dM_x(\varphi) = dT(\varphi)\, y_s(\varphi) =$$

$$= \frac{1}{2} r^2(\varphi)\, d\varphi \cdot \frac{2}{3} r(\varphi) \sin\varphi,$$

illetve

$$dM_y(\varphi) = dT(\varphi)\, x_s(\varphi) =$$

$$= \frac{1}{2} r^2(\varphi)\, d\varphi \cdot \frac{2}{3} r(\varphi) \cos\varphi.$$

Ezek felhasználásával a *keresett nyomatékok:*

$$M_x(\alpha, \beta) = \frac{1}{3}\int_{\alpha}^{\beta} r^3(\varphi) \sin \varphi \, d\varphi, \quad M_y(\alpha, \beta) = \frac{1}{3}\int_{\alpha}^{\beta} r^3(\varphi) \cos \varphi \, d\varphi.$$

A súlypont koordinátái tehát:

$$x_s = \frac{M_y(\alpha, \beta)}{T(\alpha, \beta)}, \qquad y_s = \frac{M_x(\alpha, \beta)}{T(\alpha, \beta)},$$

ahol $T(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) \, d\varphi$ az említett síkrész *területe.*

Az $x = x(t), y = y(t)$ paraméteres megadás esetén *képleteink* — tekintettel a 3. § *b)* $\alpha)$-beli megállapításokra — így írhatók:

$$M_x(\gamma, \delta) = \frac{1}{3}\int_{\gamma}^{\delta} y(t)\,[x(t)\,\dot{y}(t) - \dot{x}(t)\,y(t)]\,dt,$$

illetve

$$M_y(\gamma, \delta) = \frac{1}{3}\int_{\gamma}^{\delta} x(t)\,[x(t)\,\dot{y}(t) - \dot{x}(t)\,y(t)]\,dt.$$

Végül $y = y(x)$ explicit megadás esetén:

$$M_x(a, b) = \frac{1}{3}\int_{a}^{b} y(x)\,[xy'(x) - y(x)]\,dx,$$

illetve

$$M_y(a, b) = \frac{1}{3}\int_{a}^{b} x[xy'(x) - y(x)]\,dx.$$

$\beta)$ Homogén görbedarab elsőrendű nyomatéka

$\beta_1)$ Az $y = f(x)$ explicit egyenletű görbe $a \leqq x \leqq b$ szakasz menti darabjának elsőrendű nyomatékát keressük. A *nyomaték differenciálja* az $[x, x + dx]$ részszakaszon:

$$dM_x(x) = ds(x)\,y(x) = y(x)\sqrt{1 + y'^2(x)}\,dx,$$

illetve:

$$dM_y(x) = ds(x)\,x = x\sqrt{1 + y'^2(x)}\,dx,$$

vagyis (a függvény differenciáljának általános tulajdonságaival, valamint a b), $\alpha_2)$ helyen tett speciális megjegyzésekkel összhangban) az említett részszakaszra vonatkozó ívhossz-

differenciál, ún. ívelem szorozva a megfelelő koordinátának e részszakasz elején (az x helyen) felvett értékével. *A keresett nyomatékok* tehát:

$$M_x(a, b) = \int_a^b y(x)\sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx, \qquad M_y(a, b) = \int_a^b x\sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx,$$

a súlypont koordinátái pedig:

$$x_s = \frac{M_y(a, b)}{s(a, b)}, \qquad y_s = \frac{M_x(a, b)}{s(a, b)},$$

ahol $s(a, b) = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx$ az említett görbedarab *ívhossza.*

β_2) Az $x = x(t)$, $y = y(t)$ paraméteres megadás esetén *formuláink* a következő alakot öltik:

$$M_x(\gamma, \delta) = \int_\gamma^\delta y(t)\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\, dt, \qquad M_y(\gamma, \delta) = \int_\gamma^\delta x(t)\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\, dt.$$

β_3) Végül $r = r(\varphi)$ polárkoordinátás megadás esetén:

$$M_x(\alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta r(\varphi) \sin\varphi \sqrt{r^2(\varphi) + \dot{r}^2(\varphi)}\, d\varphi,$$

illetve

$$M_y(\alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta r(\varphi) \cos\varphi \sqrt{r^2(\varphi) + \dot{r}^2(\varphi)}\, d\varphi.$$

Ilyen megadás esetén még szokás számítani *a súlypont rádiuszvektorát és hajlásszögét:*

$$r_s = \sqrt{x_s^2 + y_s^2} = \frac{1}{s(\alpha, \beta)}\sqrt{M_y^2(\alpha, \beta) + M_x^2(\alpha, \beta)},$$

és

$$\varphi_s = \operatorname{arc\,tg}\frac{y_s}{x_s} = \operatorname{arc\,tg}\frac{M_x(\alpha, \beta)}{M_y(\alpha, \beta)}.$$

γ) Homogén forgástest elsőrendű nyomatéka

Az $y = f(x)$ explicit egyenletű görbe $a \leqq x \leqq b$ szakasz menti darabjának az x tengely körüli megforgatásával képzett homogén forgástest elsőrendű nyomatékát keressük az (y, z) síkra vonatkozólag. A *nyomaték differenciálja* nyilván:

$$dM_{yz}(x) = dV(x)\, x = \pi y^2(x)\, dx \cdot x.$$

A kérdezett nyomaték tehát:

$$M_{yz}(a, b) = \pi \int_a^b xy^2(x)\, dx,$$

a forgástengelyen ($y = z = 0$) *levő súlypont abszcisszája* pedig:

$$x_s = \frac{M_{yz}(a, b)}{V(a, b)},$$

ahol $V(a, b) = \pi \int_a^b y^2(x)\, dx$ a szóban forgó térrész *térfogata.*

δ) Homogén forgásfelület elsőrendű nyomatéka

Az előbbi módon képzett homogén forgásfelület $a \leqq x \leqq b$ szakasz menti darabjának hasonló elsőrendű nyomatékát keressük. A *nyomaték differenciálja* a már ismert indokolással:

$$dM_{yz}(x) = dF(x)\, x = 2\pi\, y(x) \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx \cdot x.$$

Ezzel *a kérdezett nyomaték:*

$$M_{yz}(a, b) = 2\pi \int_a^b x\, y(x) \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx,$$

a forgástengelyen ($y = z = 0$) *levő súlypont abszcisszája* pedig:

$$x_s = \frac{M_{yz}(a, b)}{F(a, b)},$$

ahol $F(a, b) = 2\pi \int_a^b y(x) \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx$ az említett felületdarab *felszíne.*

ε) Speciális homogén térbeli alakzatok elsőrendű nyomatéka

Valamilyen tengelyre vagy síkra vonatkoztatva értendő! — Egyszeres integrálás útján csak akkor számítható, ha sikerül *egy változóval felírni a nyomaték differenciálját.* További körülményes csoportosítás helyett a példákra utalunk.

Példák és feladatok

α | α_1) **1.** Határozzuk meg az $y = b$ *egyenes* $[0, a]$ szakasza alatti *téglalap* alakú síkrész statikai nyomatékát az x és y tengelyre vonatkozólag, majd ezek birtokában a síkrész súlypontjának koordinátáit.

A megadott formulák szerint:

$$M_x = \frac{1}{2} \int_0^a b^2\, dx = \frac{ab^2}{2}, \qquad M_y = \int_0^a xb\, dx = \frac{a^2 b}{2}.$$

A téglalap alakú síkrész területe: $T=ab$.

E szerint súlypontjának koordinátái:

$$x_s=\frac{M_y}{T}=\frac{\frac{a^2b}{2}}{ab}=\frac{a}{2},$$

$$y_s=\frac{M_x}{T}=\frac{\frac{ab^2}{2}}{ab}=\frac{b}{2},$$

amint az előre várható volt.

2. Végezzünk hasonló vizsgálatot az $y=+\sqrt{r^2-x^2}$ *félkörív* alatti síkrésszel kapcsolatban!

Az előbbi módon:

$$M_x=\frac{1}{2}\int_{-r}^{+r}(r^2-x^2)\,dx=\int_0^r(r^2-x^2)\,dx=\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^r=\frac{2r^3}{3},$$

$$M_y=\int_{-r}^{+r}x\sqrt{r^2-x^2}\,dx-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left[(r^2-x^2)^{3/2}\right]_{-r}^{r}=0.$$

Ez utóbbi eredmény nyilvánvaló, mert az y tengely a körnek szimmetriatengelye.

Innen a félkörterület súlypontjának koordinátái, lévén $T=\frac{r^2\pi}{2}$:

$$x_s=0;\qquad y_s=\frac{M_x}{T}=\frac{\frac{2r^3}{3}}{\frac{r^2\pi}{2}}=\frac{4r}{3\pi}.$$

3. Meghatározandó az $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ *ellipszis* felső félívével és az x tengellyel határolt síkrész súlypontja.

Ez esetben:

$$\frac{T}{2}=\frac{ab\pi}{2};\qquad M_x=2\int_0^a\frac{y^2}{2}\,dx=\frac{b^2}{a^2}\int_0^a(a^2-x^2)\,dx=\frac{2ab^2}{3}.$$

Ezekkel:

$$y_s=M_x:\frac{T}{2}=\frac{2ab^2}{3}:\frac{ab\pi}{2}=\frac{4b}{3\pi},\qquad x_s=0$$

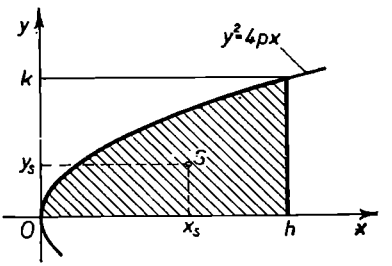
(az y tengelyre vonatkozó szimmetria miatt).

Hasonlóan igazolható, hogy a jobb oldali félellipszis-területre:

$$y_s=0,\qquad x_s=\frac{4a}{3\pi};$$

$$M_x = \frac{b^2}{6a^2} x(3a^2 - x^2), \qquad M_y = \frac{a^3}{3b^2}(b^3 - y^3).$$

4. Hol van az $y^2 = 4px$ *parabola*görbe és az x tengely $0 \leqq x \leqq h$ szakasza közé eső síkrész súlypontja? (Lásd a 3. ábrát.)



3. ábra

Most:

$$x_s = \frac{M_y}{T} = \frac{\int_0^h xy\,dx}{\int_0^h y\,dx} = \frac{\int_0^h x \cdot 2p^{1/2}x^{1/2}\,dx}{\int_0^h 2p^{1/2}x^{1/2}\,dx} = \frac{\frac{2}{5}h^{5/2}}{\frac{2}{3}h^{3/2}} = \frac{3}{5}h,$$

$$y_s = \frac{M_x}{T} = \frac{\int_0^h \frac{y}{2}y\,dx}{\int_0^h y\,dx} = \frac{\frac{1}{2}\int_0^h 4px\,dx}{\frac{2}{3}h^{3/2}p^{1/2}} = \frac{ph^2}{\frac{4}{3}h^{3/2}} = \frac{3}{8}(2p^{1/2}h^{1/2}) = \frac{3}{8}k.$$

5. Hol van az $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ egyenletű *asztrois*görbe és az x tengely közé eső síkrész súlypontja?

Esetünkben:

$$\frac{T}{2} = \frac{3a^2\pi}{16}; \quad M_x = \frac{1}{2}\int_{-a}^{+a} y^2(x)\,dx = \frac{2}{2}\int_0^a (a^{2/3} - x^{2/3})^3\,dx$$

(az y tengelyre való szimmetria miatt).

Így:

$$M_x = \int [a^2 - 3a^{4/3}x^{4/3} + 3a^{2/3}x^{4/3} - x^2]\,dx = \frac{16a^3}{105};$$

$$y_s = \frac{M_x}{T/2} = \frac{256a}{315\pi}, \qquad x_s = 0$$

(szimmetria az y tengelyre).

6. Meghatározandó az

$$x = b(t - \sin t), \qquad y = b(1 - \cos t); \qquad 0 \leqq t \leqq \pi$$

fél *cikloi*sgörbe alatti síkrész súlypontja.

Jelen esetben:

$$\frac{T}{2}=\frac{3b^2\pi}{2}; \qquad y_s=\frac{M_x}{T/2}=\frac{2}{3b^2\pi}\int_{t=0}^{\pi}\frac{y(t)^2}{2}\dot{x}(t)\,dt=\frac{2}{3b^2\pi\cdot 2}\int_0^{\pi}8b^3\sin^6\frac{t}{2}\,dt=$$

$$=\frac{8b}{3\pi}\int_0^{\pi}\sin^6\frac{t}{2}\,dt=\frac{16b}{3\pi}\int_{u=0}^{\pi/2}\sin^6 u\,du=\frac{16b}{3\pi}\cdot\frac{5\cdot 3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{5b}{6}.$$

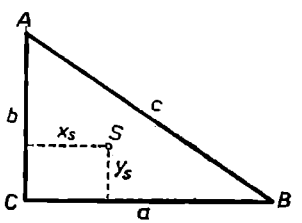
$$x_s=\frac{2}{3b^2\pi}\int_0^{\pi}x(t)y(t)\dot{x}(t)\,dt=\frac{2}{3b^2\pi}\int_0^{\pi}b^3(t-\sin t)(1-\cos t)^2\,dt=\frac{\pi b}{2}+\frac{8b}{9\pi}.$$

7. Határozzuk meg a 4. ábrán látható *derékszögű háromszög* súlypontját.

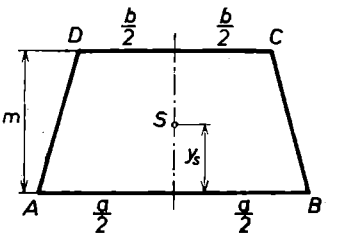
8. Számítsuk ki az a alapú és h magasságú *háromszög* statikai nyomatékát az alapjára vonatkozólag.

9. Számítsuk ki az a befogójú *derékszögű egyenlő szárú háromszög* statikai nyomatékát minden oldalára vonatkozólag.

10. Határozzuk meg az 5. ábrán látható *ABCD egyenlő szárú trapéz* súlypontját.



4. ábra



5. ábra

Határozzuk meg az alábbi görbék és egyenesek határolta síkidomok súlypontját:

11. $y=x^3$; $y=0$, $x=1$,

12. $y=x^4$; $y=1$, $x=0$.

13. $y=x^4$; $y=0$, $x=1$.

14. $y=\frac{1}{x}$; $y=0$, $x=1$, $x=4$.

15. $y=\frac{1}{x^2}$; $y=0$, $x=1$, $x=3$.

16. $y=\operatorname{ch} x$; $y=0$, $x=-1$, $x=1$.

17. $y=\operatorname{ch} x$; $y=3$.

18. $y=b\operatorname{ch}\frac{x}{a}$; $y=0$, $x=0$, $x=x_1$.

19. $y=be^{\frac{x}{a}}$; $y=0$, $x=0$, $x=x_1$.

20. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1; \quad y=0, \quad x=a, \quad x=x_1.$

21. $y^2=x^2\frac{a-x}{a+x}; \quad y=0, \quad x=0, \quad x=a.$

22. Határozzuk meg az a alapú és h magasságú *szimmetrikus parabolaszelet* súlypontját.

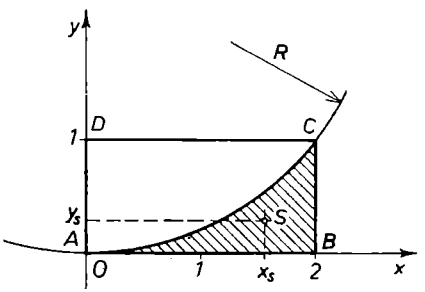
23. Egy 2 m alapú és 1 m magasságú *ABCD téglalap*ot az AB oldalt az A pontban érintő és a C ponton átmenő *kör*rel kettéosztunk (6. ábra). Határozzuk meg az ABC görbevonalú háromszög alakú síkrész súlypontját.

24. Az a és b oldalú téglalapot egy parabolaívvel két részre osztjuk. A parabola tengelypontja egybeesik a négyszög egyik csúcsával, egy másik pontja pedig a négyszög ellentett csúcsával, a 7. ábrán látható módon. Határozzuk meg a négyszög mindkét részének S_1 és S_2 súlypontját.

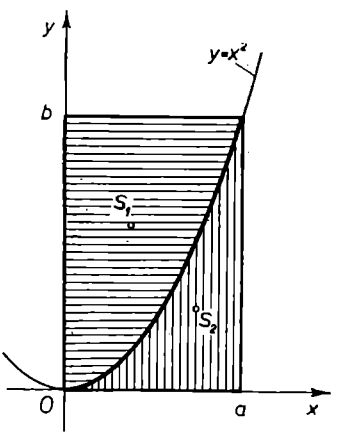
25. Határozzuk meg azon síkidom súlypontját, melyet a két koordinátatengely és a $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ *parabola* határol.

26. Határozzuk meg az $y=\sin x$ görbe félhulláma alatti síkrész súlypontját.

27. Határozzuk meg az $y=\frac{2}{1+x^2}$ és $y=x^2$ görbékkel határolt síkidomnak az x tengelyre vonatkozó statikai nyomatékát.



6. ábra



7. ábra

28. Ugyanezt az $y=\sin x$ és $y=\frac{1}{2}$ görbék esetére (8. ábra).

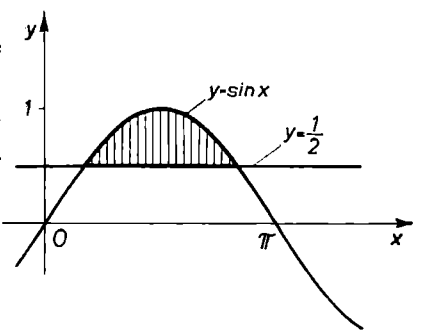
29. Ugyanezt az $y=x^2$ és $y=\sqrt{x}$ görbék esetére.

30. Határozzuk meg az $y^2=ax^3-x^4$ zárt görbe által határolt síkidom súlypontjának koordinátáit.

31. Határozzuk meg az $y=\frac{1}{3}\sqrt{x}(3-x)$ görbe (parabolikus levél) *hurokjá*val határolt síkrész súlypontját.

***32.** Igazoljuk a következő formulát:

$$\int_a^b (ax+b)f(x)\,dx=(a\xi+b)\int_a^b f(x)\,dx,$$



8. ábra

ahol ξ az $[a\ b]$ alapú és az $y=f(x)$ görbével határolt görbevonalú trapéz súlypontjának abszcisszája (*Verescsagin*-féle szabály).

α_2) **33.** Határozzuk meg az $r=a$ poláregyenletű *kör*, valamint a $\varphi=0$ és $\varphi=\varphi_1$ hajlásszögű rádiuszvektor által határolt szektorterület M_x és M_y statikai nyomatékát, majd x_s és y súlyponti koordinátáit. Vizsgáljuk meg a $\varphi_1=\frac{\pi}{2}$ és π speciális eseteket is.

A megadott képletek szerint:

$$M_x=\frac{1}{3}\int_0^{\varphi_1} a^3\sin\varphi\,d\varphi=\frac{a^3}{3}[1-\cos\varphi_1],$$

$$M_y=\frac{1}{3}\int_0^{\varphi_1} a^3\cos\varphi\,d\varphi=\frac{a^3}{3}\sin\varphi_1.$$

A körszektor területe:

$$T=\frac{a^2}{2}\varphi_1.$$

A körszektor súlyponti koordinátái tehát:

$$x_s=\frac{M_y}{T}=\frac{2a}{3}\frac{\sin\varphi_1}{\varphi_1}.$$

$$y_s=\frac{M_x}{T}=\frac{2a}{3}\frac{1-\cos\varphi_1}{\varphi_1}.$$

A $\varphi_1=\frac{\pi}{2}$ esetben:

$$x_s=y_s=\frac{4a}{3\pi}.$$

A $\varphi_1=\pi$ esetben pedig: $x_s=0$ $y_s=\frac{4a}{3\pi}$.

34. Határozzuk meg az $r=2a(1+\cos\varphi)$ *kardioid* felső félíve és a polártengely közti síkrész súlypontját $(0\leqq\varphi\leqq\pi)$.

Ekkor az előbbi módon:

$$\frac{T}{2}=3a^2\pi \quad \text{és} \quad M_x=\frac{1}{3}\int_{\varphi=0}^{\pi} r^2(\varphi)^3\sin\varphi\,d\varphi=\frac{8a^3}{3}\int_{\varphi=0}^{\pi}(1+\cos\varphi)^3\sin\varphi\,d\varphi=$$

$$=\frac{2a^3}{3}\Big[(1+\cos\varphi)^4\Big]_{\pi}^{0}=\frac{32a^3}{3}.$$

Tehát:

$$y_s=\frac{M_x}{T/2}=\frac{32a}{9\pi}.$$

Hasonlóan:

$$M_y = \frac{8a^3}{3}\int_0^{\pi} (1+\cos\varphi)^3 \cos\varphi \, d\varphi; \qquad x_s = \frac{5a}{3}.$$

35. $r = a\varphi$; a $T(0, \pi)$ szektorterület nyomatéka?

$$T_\pi = \frac{a^2\pi^3}{6}; \qquad M_x = \frac{1}{3}\int_0^{\pi} a^3\varphi^3 \sin\varphi \, d\varphi, \qquad M_y = \frac{1}{3}\int_0^{\pi} a^3\varphi^3 \cos\varphi \, d\varphi.$$

Ismételt parciális integrálással nyerjük:

$$M_x = \frac{\pi}{3}(\pi^2 - 6)a^3, \qquad M_y = -a^3(\pi^2 - 4)\pi.$$

36. $r = ae^{\varphi}$; a $T(0, \pi)$ szektorterület nyomatéka?

37. Határozzuk meg az *asztrois* első negyedbeli íve alatti síkrész súlypontját.

38. Határozzuk meg az a sugarú és 2α középponti szögű *körszektor* súlypontját.

39. Határozzuk meg az $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ (*Bernoulli*-féle) *lemniszkáta* első hurokja által határolt síkidom súlypontjának derékszögű koordinátáit.

β) **1.** Határozzuk meg az $y = +\sqrt{r^2 - x^2}$ *félkörív* súlypontját!

A megadott formulák szerint:

$$M_x = \int_{-r}^{+r} \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} \, dx = r\int_{-r}^{+r} dx = 2r\int_0^{r} dx = 2r^2,$$

$$M_y = \int_{-r}^{+r} x\sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} \, dx = 0,$$

mert páros, illetve páratlan függvény integráljáról van szó, az origóra nézve szimmetrikus szakaszon.

A súlypont koordinátái tehát:

$$x_s = \frac{M_y}{S} = 0, \qquad y_s = \frac{M_x}{S} = \frac{2r^2}{r\pi} = \frac{2r}{\pi}.$$

Ez láthatóan *másfélszerese a félkörterület súlyponti ordinátájának* (l. α_1) 2. pl.).

2. Meghatározandó az $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ egyenletű *asztrois*görbe x tengely feletti ívének súlypontja.

Esetünkben:

$$\frac{S}{2} = \frac{6a}{2} = 3a; \qquad M_x = \int_{x=-a}^{+a} y(x)\, ds; \qquad y\sqrt{1 + y'^2} = (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2} \cdot \frac{a^{1/3}}{x^{1/3}}.$$

Helyettesítés:

$$x^{1/3}=a^{1/3}\cos t, \qquad \pi \geqq t \geqq 0.$$

Ily módon:

$$M_x=2a^{1/3}\int_0^{+a}(a^{2/3}-x^{2/3})^{3/2}\cdot\frac{dx}{x^{1/3}}=-6a^2\int_{\pi/2}^{0}\sin^4 t\cos t\,dt=\frac{6a^2}{5}\Big[\sin^5 t\Big]_0^{\pi/2}=\frac{6a^2}{5}.$$

A súlypont koordinátái tehát:

$$y_s=\frac{M_x}{T/2}=\frac{6a^2}{5}:3a=\frac{2a}{5}, \qquad x_s=0$$

(szimmetriaokok miatt).

A $0 \leqq x \leqq a$ ívdarabra (negyedívre), szimmetriaokokból:

$$x_s=y_s=\frac{2a}{5}.$$

3. Meghatározandó az $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ *cikloisgörbe* egy teljes ágának súlypontja.

Most:

$$S=8a; \qquad M_x=\int_0^{\pi} y\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt=\sqrt{2a^2}\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^{3/2}\,dt=$$

$$=4a^2\cdot 2\int_0^{\pi}\sin^3\frac{t}{2}\,dt=8a^2\int_0^{\pi}2\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)\sin\frac{t}{2}\cdot\frac{dt}{2}=16a^2\int_0^{+1}(1-u^2)\,du=$$

$$=16a^2\left[u-\frac{u^3}{3}\right]_0^{+1}=\frac{32a^2}{3}; \qquad y_s=\frac{M_x}{S}=\frac{32a^2}{3}:8a=\frac{4a}{3}.$$

Az $y=a(1-\cos t)=2a\sin^2\frac{t}{2}$ a $t=\pi$-re szimmetrikus, továbbá az $\dot{x}=a(1-\cos t)=$

$=2a\sin^2\frac{t}{2}$ hasonlóan [vagyis az $x(t)$ változási sebessége a $t=\pi$-re szimmetrikus], azaz a teljes cikloiság az $x=a\pi$ egyenesre szimmetrikus!

Következésképpen: $x_s=a\pi$.

Igazoljuk, hogy félívre: $x_s=y_s=\frac{4a}{3}$.

4. Mekkora az $r=ae^{\varphi}$ *logaritmikus spirális* $0 \leqq \varphi \leqq \pi$ ívdarabjának M_x és M_y statikai nyomatéka?

Itt:

$$S=\int_0^{\pi}\sqrt{a^2e^{2\varphi}+a^2e^{2\varphi}}\,d\varphi=\sqrt{2a}\int_0^{\pi}e^{\varphi}\,d\varphi=\sqrt{2a}(e^{\pi}-1).$$

Továbbá:

$$M_x = \sqrt{2}a^2 \int_0^{\pi} e^{2\varphi} \sin\varphi \, d\varphi \quad \text{és} \quad M_y = \sqrt{2}a^2 \int_0^{\pi} e^{2\varphi} \cos\varphi \, d\varphi.$$

Az integrálást (parciálisan) elvégezve, nyerjük:

$$M_x = \frac{a^2\sqrt{2}}{5}(e^{2\pi}+1), \qquad M_y = -\frac{2\sqrt{2}a^2}{5}(e^{2\pi}+1).$$

Igazoljuk, hogy a súlypont (a 2. negyedben) a $\varphi_s = -\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}$ hajlásszögű rádiuszvektoron helyezkedik el. Mekkora a súlypont r_s rádiuszvektora?

5. $y^2 = 2px$; $M_x(0, x_1) = ?$ $M_y(0, x_1) = ?$.

Igazolható, hogy:

$$M_x = \frac{1}{3}\left[\frac{(p^2+y^2)^{3/2}}{p} - p^2\right],$$

$$M_y = \frac{1}{16}\left[\frac{y\sqrt{p^2+y^2}}{p^2}(p^2+2y^2) - p^2 \ln\frac{y+\sqrt{p^2+y^2}}{p}\right].$$

6. $y = a \operatorname{ch}\frac{x}{a}$; $M_x(0, x_1) = ?$ $M_y(0, x_1) = ?$

Jelen esetben:

$$S(0, x_1) = \int_0^{x_1} \sqrt{1 + \left[\left(a \operatorname{ch}\frac{x}{a}\right)'\right]^2}\, dx = \int_0^{x_1} \operatorname{ch}\frac{x}{a}\, dx = a \operatorname{sh}\frac{x_1}{a} = \sqrt{y_1^2 - a^2};$$

továbbá:

$$M_x(0, x_1) = \int_0^{x_1} a \operatorname{ch}\frac{x}{a} \cdot \operatorname{ch}\frac{x}{a}\, dx = \frac{a}{2}\int_0^{x_1}\left(\operatorname{ch}\frac{2x}{a}+1\right) dx =$$

$$= \frac{a}{2}\left[a \operatorname{sh}\frac{x}{a} \operatorname{ch}\frac{x}{a} + x\right]_0^{x_1} = \frac{1}{2}\left[y_1\sqrt{y_1^2-a^2} + s x_1\right].$$

Ezekkel:

$$y_s = \frac{1}{2}\left(y_1 + a\frac{x_1}{\sqrt{y_1^2-a^2}}\right).$$

Hasonlóan:

$$M_y(0, x_1) = x_1\sqrt{y_1^2-a^2} - a(y_1-a); \qquad x_s = x_1 - a\sqrt{\frac{y_1-a}{y_1+a}}.$$

7. Határozzuk meg a 2α központi szögű és a sugarú *körív* súlypontját!

8. Határozzuk meg az $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ *ellipszis* első negyedbeli ívének az x tengelyre vonatkozó statikai nyomatékát!

9. Határozzuk meg az $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ *láncgörbe* $x_1=-a$ és $x_2=a$ közötti ívének súlypontját!

10. Határozzuk meg az $r=2a(1+\cos\varphi)$ *kardioid*görbe súlypontjának derékszögű koordinátáit!

***11.** Igazolandó a következő *tétel:*

Tetszés szerinti *parabolaív* statikai nyomatéka a parabola tengelyére vonatkozólag arányos a végpontok görbületi sugarának különbségével. Az arányossági tényező $\frac{p}{3}$-mal egyenlő, ahol a p a parabola paramétere.

Mivel a görbület mint alaki tulajdonság független a görbe helyzetétől, ezért dolgozhatunk speciális helyzetű, pl. az $y=\frac{x^2}{2p}$ egyenletű parabolával. Ennél:

$$y'=\frac{x}{p} \quad \text{és} \quad y''=\frac{1}{p}.$$

A görbületi sugár az x abszcisszájú görbepontban, mint ismeretes:

$$R(x)=\frac{(1+y^2)^{3/2}}{y''}=p\sqrt{\left(1+\frac{x^2}{p^2}\right)^3}.$$

Vizsgáljuk most a parabola $[x_1, x_2]$ szakasz menti darabjának az y tengelyre vonatkozó statikai nyomatékát:

$$M_y=\int_{x_1}^{x_2} x\sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_{x_1}^{x} x\sqrt{1+\frac{x^2}{p^2}}\,dx=\frac{p^2}{2}\int_{x_1}^{x_2}\frac{2x}{p^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{p^2}}\,dx=$$

$$=\frac{p^2}{3}\left[\sqrt{\left(1+\frac{x^2}{p^2}\right)^3}\right]_{x_1}^{x}=\frac{p}{3}\left[p\sqrt{\left(1+\frac{x_2^2}{p^2}\right)^3}-p\sqrt{\left(1+\frac{x_1^2}{p^2}\right)^3}\right]=$$

$$=\frac{p}{3}\,[R(x_2)-R(x_1)],\ \text{q. e. d.}$$

γ **1.** Határozzuk meg az $y=+\sqrt{r^2-x^2}$, $0\leqq x\leqq r$ negyedkör x tengely körüli megforgatásával képzett *félgömbtest* súlypontját!

A megadott képlet szerint:

$$M=\pi\int_0^r x\cdot(r^2-x^2)\,dx=\pi\left[\frac{r^2x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]_0^r=\frac{r^4\pi}{4}.$$

Ugyanakkor:

$$V=\frac{2r^3\pi}{3}.$$

A félgömbtest súlypontja tehát:

$$x_s=\frac{M}{V}=\frac{8}{3}r.$$

2. Határozzuk meg az $y=\frac{r}{m}x$, $0\leqq x\leqq m$ egyenesdarab x tengely körüli megforgatásával képzett *körkúptest* súlypontját.

Az előbbi módon:

$$M=\pi\int_0^m x\cdot\frac{r^2}{m^2}x^2\,dx=\frac{r^2\pi}{4m^2}\left[x^4\right]_0^m=\frac{r^2m^2\pi}{4}.$$

Lévén $V=\frac{1}{3}r^2\pi m$, a súlypontra nyerjük:

$$x_s=\frac{M}{V}=\frac{3}{4}m.$$

Ez láthatóan *független az alapkör sugarától.*

3. Hol van az $y^2=2px$ *parabola*görbe $0\leqq x\leqq x_1$ szakasz menti darabjának az x tengely körüli megforgatásával képzett forgástest súlypontja?

Jelen esetben:

$$V=\pi\int_0^{x_1}2p\,x\,dx=\pi px_1^2;\qquad M=\pi\int_0^{x_1}x\cdot 2p\,x\,dx=\frac{2\pi px_1^3}{3}.$$

Így:

$$x_s=\frac{M}{V}=\frac{2x_1}{3}.$$

4. Hol van az $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ *ellipszis* $0\leqq x\leqq a$ szakaszmenti darabjának az x tengely körüli megforgatásával képzett forgástest súlypontja?

Az előbbi módon:

$$V=\frac{4ab^2\pi}{6};\qquad M=\pi\int_0^a x\cdot b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\pi b^2\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4a^2}\right]_0^a=\pi\frac{a^2b^2}{4};$$

$$x_s=\frac{M}{V}=\frac{\pi a^2b^2}{4}\cdot\frac{6}{4ab^2\pi}=\frac{3}{8}a.$$

5. Hasonló feladat az $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{p^2}=1$ *hiperbola* esetén, ha $a\leqq x\leqq x_1$.

6. Meghatározandó az $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$ *cisszoid* $0 \leqq x \leqq a$ szakaszmenti darabjának az x tengely körüli megforgatása útján nyert forgástest súlypontja.

Esetünkben:

$$V = \pi \int_0^a \frac{x^3}{2a-x}\, dx; \qquad M = \pi\left[16 \ln 2 - \frac{131}{12}\right] a^4.$$

7. $y^2 = \frac{1}{2}\left[a\sqrt{a^2+8x^2} - (a^2+2x^2)\right]$, *lemniszkáta;* $M_x(0, a) = ?$

$$M = \frac{\pi}{2} \int_{x=0}^{a} \left[ax\sqrt{a^2+8x^2} - x(a^2+2x^2)\right] dx =$$

$$= \frac{\pi a}{2 \cdot 16} \int_0^a 16x\sqrt{a^2+8x^2}\, dx - \frac{\pi}{2 \cdot 4} \int_0^a 4x(a^2+2x^2)\, dx =$$

$$= \frac{\pi a}{32}\left[\frac{2}{3}(a^2+8x^2)^{3/2}\right]_0^a - \frac{\pi}{8}\left[\frac{1}{2}(a^2+2x^2)^2\right]_0^a =$$

$$= \frac{\pi a}{32}\left[\frac{2}{3}(27a^3 - a^3)\right] - \frac{\pi}{8}\left[\frac{1}{2}(9a^4 - a^4)\right] = \frac{\pi a^4}{24}.$$

8. A fél *cikloisívet* az x tengely körül megforgatjuk; $M = ?$, $x_s = ?$

$$M = \pi \int_0^{\pi} b^4(t - \sin t)(1 - \cos t)^3\, dt; \qquad V = \pi \int_0^{\pi} b^3(1 - \cos t)^3\, dt;$$

$$x_s = \frac{b\pi}{2} + \frac{64b}{45\pi}.$$

Forgassuk meg az alábbi görbéket az x tengely körül, és messük el az így keletkező felületeket az $x = a$ és $x = b$ egyenletű síkokkal. Határozzuk meg a forgásfelületek és a síkok határolta testek súlypontját.

9. $y = x^2$; $x = 0$, $x = 2$.

10. $y = x^3$; $x = 0$, $x = 1$.

11. $y = 1 - x^2$; $x = 0$, $x = 1$.

12. $y = \frac{1}{x}$; $x = 1$, $x = 2$.

13. $y = \operatorname{ch} x$; $x = 0$, $x = a$.

14. $x^2 - y^2 = 1$; $x = 1$, $x = a$.

15. Határozzuk meg a 9. ábrán látható forgástest súlypontját. A metszetet az *AB egyenes*, továbbá a *BC* és *AC parabolák* határolják, melyek tengelye az y tengely. A forgástengely az x tengely. (Írjuk fel az egyik parabola egyenletét.)

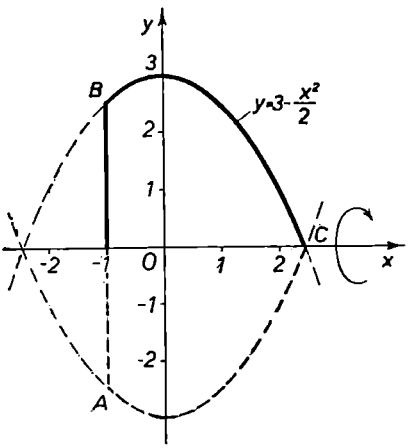
Forgassuk meg az alább felsorolt görbéket az y tengely körül, és messük el az így keletkező felületeket az $y=a$ és $y=b$ síkokkal. Határozzuk meg a forgásfelületek és a síkok határolta testek súlypontját.

16. $y=x^2$; $y=0$, $y=a$.

17. $y=x^3$; $y=0$, $y=1$.

18. $y=\frac{1}{x}$; $y=1$, $y=4$.

19. $x^2-y^2=1$; $y=0$, $y=a$.



9. ábra

δ | **1.** Határozzuk meg az $y=+\sqrt{r^2-x^2}$, $0\leqq x\leqq r$ negyedkör x tengely körüli megforgatásával képzett *félgömbfelület* súlypontját!

A megadott képlet szerint:

$$M=2\pi\int_0^{\pi} x\cdot\sqrt{r^2-x^2}\cdot\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx=2\pi r\int_0^{r} x\,dx=r^3\pi.$$

Lévén $F=2r^2\pi$, a súlypontra nyerjük: $x_s=\frac{M}{F}=\frac{r}{2}$.

2. Hasonló számítást végezzünk az $y=\frac{r}{m}x$, $0\leqq x\leqq m$ egyenesdarab x tengely körüli megforgatásával képzett *körkúp* (palást-) *felület*ére!

Az előbbi módon:

$$M=2\pi\int_0^{m} x\cdot\frac{r}{m}x\cdot\sqrt{1+\frac{r^2}{m^2}}\,dx=\frac{2r\pi}{m^2}\sqrt{r^2+m^2}\int_0^{m} x^2\,dx=$$

$$=\frac{2r\pi\sqrt{r^2+m^2}}{3m^2}\left[x^3\right]_0^m=\frac{2r\pi m\sqrt{r^2+m^2}}{3}.$$

Lévén $F=\frac{2r\pi\sqrt{r^2+m^2}}{2}$, a súlypontra kapjuk:

$$x_s=\frac{M}{F}=\frac{2}{3}m.$$

3. Az előbbi eredmény felhasználásával számítsuk ki a teljes *kúpfelület* (palást + alapkör) súlyponti abszcisszáját.

A kérdezett abszcisszát úgy nyerjük, hogy a palást és az alapkör statikai nyomatékának összegét osztjuk az össz-felszínnel:

$$x_s=\frac{M_p+M_a}{F_p+F_a}=\frac{\frac{2}{3}r\pi ml+mr^2\pi}{r\pi l+r^2\pi}=\frac{m}{3}\,\frac{2l+3r}{r+l},$$

ahol $l=\sqrt{r^2+m^2}$.

4. Az $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ *asztrois* egy kvadránsát megforgatjuk az x tengely körül; mekkora az így nyert forgásfelület M_x statikai nyomatéka és x_s súlyponti abszcisszája?

Esetünkben:

$$\frac{F}{2}=\frac{6}{5}a^2\pi \quad \text{és} \quad M=2\pi\int_0^a\left(a^{2/3}-x^{2/3}\right)^{3/2}\cdot\frac{a^{1/3}}{x^{1/3}}\cdot x\,dx.$$

Alkalmazzuk az $x=a\sin^3 t$ helyettesítést; így $dx=3a\sin^2 t\cos t\,dt$, $t_a=0$, $t_f=\frac{\pi}{2}$.

Ezzel:

$$M=2\pi\int_0^{\pi/2}(a^{2/3}-a^{2/3}\sin^2 t)^{3/2}\cdot\frac{a^{1/3}}{a^{1/3}\sin t}\cdot a\sin^3 t\cdot 3a\sin^2 t\cos t\,dt=$$

$$=6a^3\pi\int_0^{\pi/2}(1-\sin^2 t)^{3/2}\sin^4 t\cos t\,dt=6a^3\pi\int_0^{\pi/2}\sin^4 t\cos^4 t\,dt=$$

$$=6a^3\pi\left[\int_0^{\pi/2}\sin^4 t\,dt-2\int_0^{\pi/2}\sin^6 t\,dt+\int_0^{\pi/2}\sin^8 t\,dt\right]=$$

$$=6a^3\pi\left[\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}-2\frac{5\cdot 3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2}+\frac{7\cdot 5\cdot 3\cdot 1}{8\cdot 6\cdot 4\cdot 2}\right]\frac{\pi}{2}=$$

$$=3a^3\pi^2\,\frac{8\cdot 6\cdot 3\cdot 1-2\cdot 8\cdot 5\cdot 3\cdot 1+7\cdot 5\cdot 3\cdot 1}{8\cdot 6\cdot 4\cdot 2}=\frac{9\pi^2a^3}{128}.$$

(Közben felhasználtuk az 1. § d. β) 1. pl. eredményét.) A súlypont helye tehát:

$$x_s=\frac{M}{F/2}=\frac{9\pi^2a^3}{128}\cdot\frac{5}{6a^2\pi}=\frac{15\pi a}{256}.$$

5. Hol van a fél *cikloisív* x tengely körüli megforgatásával nyert forgásfelület súlypontja?

Jelen esetben:

$$S_\pi=\frac{32\pi b^2}{3},$$

$$M=2\pi\int_{t=0}^{\pi}xy\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt=2\sqrt{2}\,\pi b^3\int_0^{\pi}(t-\sin t)(1-\cos t)^{3/2}\,dt=$$

$$=8\pi b^3\left[\int_0^{\pi}t\sin^3\frac{t}{2}\,dt-2\int_0^{\pi}\sin^4\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\,dt\right].$$

Az első integrálást parciálisan végezzük, felhasználva, hogy:

$$\int \sin^3 \frac{t}{2}\,dt = \int \left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)\sin\frac{t}{2}\,dt = -2\left[\cos\frac{t}{2}-\frac{1}{3}\cos^3\frac{t}{2}\right] = I,$$

továbbá, hogy:

$$\int I\,dt = -2\left[2\sin\frac{t}{2}-\frac{2}{3}\left(\sin\frac{t}{2}-\frac{1}{3}\sin^3\frac{t}{2}\right)\right].$$

Ezzel:

$$M = 8\pi b^3\left\{\left[-2t\left(\cos\frac{t}{2}-\frac{1}{3}\cos^3\frac{t}{2}\right)\right]_0^{\pi} + 2\left[2\sin\frac{t}{2}-\frac{2}{3}\left(\sin\frac{t}{2}-\frac{1}{3}\sin^3\frac{t}{2}\right)\right]_0^{\pi} - \right.$$

$$\left. -\frac{4}{5}\left[\sin^5\frac{t}{2}\right]_0^{\pi}\right\} = 8\pi b^3\left\{0+2\left[2-\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)\right]-\frac{4}{5}\right\} = \frac{104}{45}\cdot 8\pi b^3.$$

A súlypont helye tehát:

$$x_s = \frac{M}{S_\pi} = \frac{104}{45}\cdot 8\pi b^3 \cdot \frac{3}{32\pi b^2} = \frac{26}{15}b.$$

6. Számítsuk ki az $y=\sqrt{x}$ *parabola* $0 \leqq x \leqq 2$ szakasz menti ívének az x tengely körüli megforgatásával keletkező forgásparaboloid-felület súlypontját.

7. Forgassuk meg az $x^2-y^2=1$ *hiperbola* [1, 2] szakasz menti darabját az x tengely körül, és határozzuk meg az így keletkező forgásfelület súlypontját.

8. Az $x^2+y^2=9$ *kör* $1 \leqq x \leqq 2$ szakasz menti ívdarabját forgassuk meg az x tengely körül, és határozzuk meg az így keletkező *gömböv* súlypontját.

***9.** Hol van az $r=a\sqrt{\cos 2\varphi}$ *lemniszkáta* egy kvadránsának az x tengely körüli megforgatásával nyert forgásfelület súlypontja?

Egy felületelem statikai nyomatéka:

$$dM = 2\pi xy\cdot ds = 2\pi a^2\cos 2\varphi\sin\varphi\cos\varphi\cdot\sqrt{a^2\left(\frac{\cos^2 2\varphi}{\cos 2\varphi}+\frac{\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi}\right)} =$$

$$= \pi a^3\cos 2\varphi\sin 2\varphi\cdot\frac{1}{\sqrt{\cos 2\varphi}} = \pi a^3\sqrt{\cos 2\varphi}\sin 2\varphi.$$

Ezzel:

$$M = \frac{\pi a^3}{2}\int_0^{\pi/4}\sqrt{\cos 2\varphi}\sin 2\varphi\cdot 2\,d\varphi = \frac{\pi a^3}{2}\left[\frac{2}{3}(\cos 2\varphi)^{3/2}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{0} = \frac{\pi a^3}{3}.$$

A súlypont helye tehát:

$$x_s = \frac{2+\sqrt{2}}{6}a.$$

Itt felhasználtuk az

$$F = \pi a^2(2-\sqrt{2})$$

eredményt.

***ε** | **1.** Az $y^2 = \dfrac{x^3}{2a-x}$ görbe egyik ágát forgassuk meg *aszimptotája* ($x=2a$ egyenes) körül.

A forgástest térfogatelemét vegyük fel a forgástengelyre merőlegesen:

$$dV=\pi(2a-x)^2\cdot dy.$$

Ennek nyomatéka az x tengelyen átmenő és a forgástengelyre merőleges síkra vonatkozólag:

$$dM=\pi(2a-x)^2\cdot y\cdot dy=$$

$$=\pi(2a-x)^2\cdot\frac{x^{3/2}}{(2a-x)^{1/2}}\cdot\frac{\frac{3}{2}x^{1/2}(2a-x)^{1/2}+\frac{1}{2}x^{3/2}(2a-x)^{-1/2}}{(2a-x)}\cdot\frac{(2a-x)^{1/2}}{(2a-x)^{1/2}}\,dx=$$

$$=\frac{\pi}{2}[3x^2(2a-x)+x^3]\,dx=\frac{\pi}{2}x^2[6a-3x+x]=\pi x^2(3a-x)\,dx.$$

Tehát:

$$M=\pi\int_{x=0}^{2a}x^2(3a-x)\,dx=\pi\left[ax^3-\frac{x^4}{4}\right]_0^{2a}=\pi(8a^4-4a^4)=4\pi a^4.$$

A térfogat:

$$V=\pi\int_{x=0}^{2a}\frac{x^2(3a-x)}{\frac{x^{3/2}}{(2a-x)^{1/2}}}\,dx=\pi\int_0^{2a}x^{1/2}(3a-x)(2a-x)^{1/2}\,dx=$$

$$=\pi\int_0^{2a}(3a-x)\sqrt{x(2a-x)}\,dx=\pi\int_0^{2a}(3a-x)\sqrt{2ax-x^2-a^2+a^2}\,dx.$$

Helyettesítés:

$$x-a=a\cos t,\qquad x=a(1+\cos t),\qquad dx=-a\sin t\,dt,$$
$$3a-x=3a-a-a\cos t=a(2-\cos t);\qquad t_a=\pi,\qquad t_f=0.$$

Ezekkel:

$$V=\pi\int_0^{2a}(3a-x)\sqrt{a^2-(x-a)^2}\,dx=\pi a^3\int_0^{\pi}(2-\cos t)\sin^2 t\,dt=$$

$$=\pi a^3\left[4\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\,dt-\int_0^{\pi}\sin^2 t\cos t\,dt\right]=\pi a^3\left[4\cdot\frac{\pi}{4}-0\right]=a^3\pi^2.$$

Végeredményben a súlypont helye:

$$x_s=\frac{M}{V}=4\pi a^4:a^3\pi^2=\frac{4a}{\pi}.$$

2. Keresendő az $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ *ellipszoid* (y,z) síkkal lemetszett egyik felének statikai nyomatéka e síkra vonatkozólag.

A térfogatelemet az x tengelyre merőlegesen választva, az

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2}$$

alapján:

$$dV=\pi\cdot b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\cdot c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\cdot dx=\frac{bc\pi}{a^2}(a^2-x^2)\,dx.$$

Ezzel a nyomaték differenciálja:

$$dM_{yz}=x\,dV=\frac{bc\pi}{a^2}x(a^2-x^2),$$

s maga a keresett nyomaték:

$$M_{yz}=\frac{bc\pi}{2a^2}\int_{x=0}^{a}2x(a^2-x^2)\,dx=\frac{bc\pi}{4a^2}\Big[(a^2-x^2)^2\Big]_a^0=\frac{a^2bc\pi}{4}.$$

Lévén $V=\frac{2abc\pi}{3}$, a súlypont: $x_s=\frac{3}{8}a$.

3. Mekkora az $x^2+y^2+z^2=r^2$ *gömbtest* felső elülső negyedéből az $\left(x-\frac{r}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{r}{2}\right)^2$ henger által kimetszett darab statikai nyomatéka az (x, y) síkra? (L. a 10. ábrát!)

A kérdezett nyomaték:

$$M_{xy}=\int_{x=0}^{r}\left(r^2-\frac{1}{3}rx-\frac{2}{3}x^2\right)\sqrt{x(r-x)}\,dx=\frac{5}{64}\pi r^4.$$

A térfogatelem:

$$dV=\left[(r-x)\sqrt{rx}+(r^2-x^2)\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{r}}\right]dx;$$

az említett test térfogata:

$$V=\frac{1}{3}\left(\pi-\frac{4}{3}\right)r^3.$$

4. Mekkora az $x^2+y^2=r^2$ *egyenes körhenger*ből a $z=\operatorname{tg}\alpha\cdot y+h$ sík és az (x, y)-sík által lemetszett darab statikai nyomatéka ez utóbbi síkra vonatkozólag? (L. a 11. ábrát.)

Egy, az y tengelyre merőleges térfogatelem statikai nyomatéka:

$$dM_{xy}=2\sqrt{r^2-y^2}\cdot(my+h)^2\cdot\frac{1}{2}dy,$$

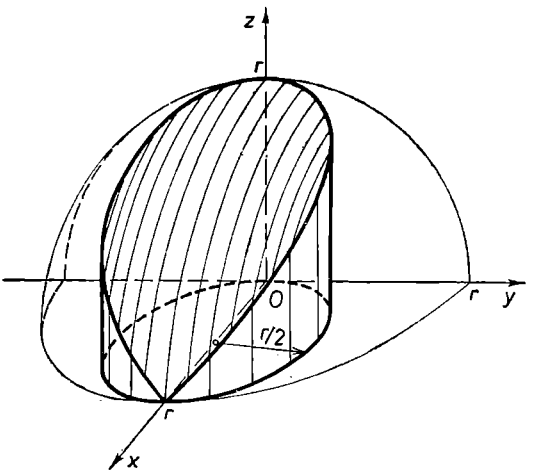
ahol $m=\operatorname{tg}\alpha$; tehát:

$$M_{xy}=\int_{-r}^{+r}(m^2y^2+2mhy+h^2)\sqrt{r^2-y^2}\,dy=\frac{\pi r^2}{8}(r^2m^2+4h^2).$$

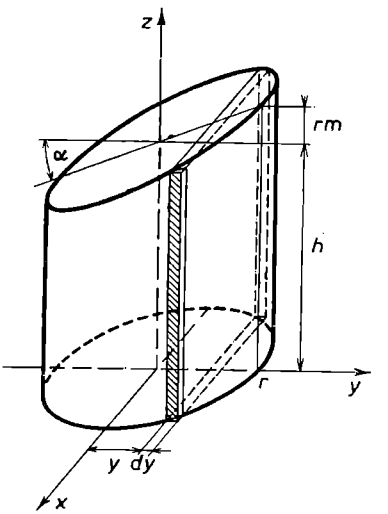
Minthogy $V = r^2\pi h$, így:

$$z_s = \frac{M_{xy}}{V} = \frac{h}{2} + \frac{r^2m^2}{8h}.$$

Ha $rm = h$, azaz $\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{r}$, akkor: $z_s = \frac{5}{8}h$.



10. ábra

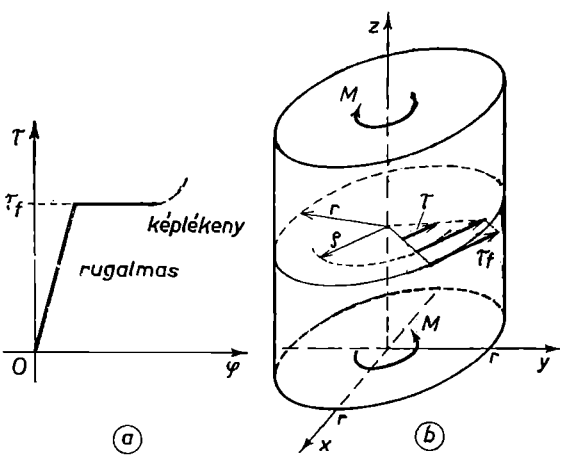


11. ábra

Műszaki alkalmazások

1. A KÉPLÉKENY RÉTEG VASTAGSÁGA CSAVART HENGERBEN*

Ha a szilárd testben valamilyen terhelés hatására ébredő feszültség egy bizonyos értéket elér, akkor az eddig *rugalmas test képlékennyé válik*, s a terhelést tovább növelve, a test — *egy darabig gyakorlatilag állandó feszültség* (az ún. *folyási határ*) *mellett* — *maradó alakváltozást szenved*. (L. a 12. ábrán a feszültség és alakváltozás egyszerűsített diagramját!)



12. ábra

Ennek alapján oldjuk meg a következő feladatot: — Egy adott r sugarú *körhenger alakú testet* akkora *csavaró nyomatékkal terhelünk*, hogy külső rétegében a csúsztató feszültség eléri a folyási határt, s az anyag itt képlékennyé válik. Számítsuk ki a képlékeny réteg vastagságát!

Tegyük fel, hogy a henger ϱ sugarú *belső magja rugalmasan defor-*

* L.: Elméleti fizikai feladatok.

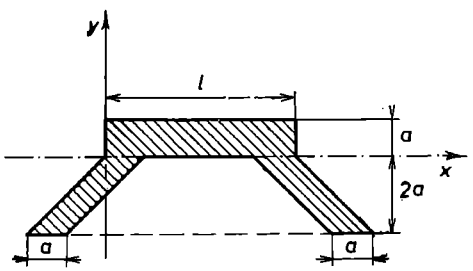
málódott, az ezen kívüli része pedig képlékenyen. Akkor e külső rétegben a csúsztató feszültség: τ_f, a rugalmas magban pedig x sugarú henger mentén: $\tau = \frac{x}{\varrho}\tau_f$. A *csavaró nyomaték* tehát:

$$M = \int_{\varrho}^{r} \tau_f \cdot 2\pi x\, dx \cdot x + \int_{0}^{\varrho} \frac{x}{\varrho}\tau_f \cdot 2\pi x\, dx \cdot x = \left(\frac{2\pi r^3}{3} - \frac{\pi\varrho^3}{6}\right)\tau_f.$$

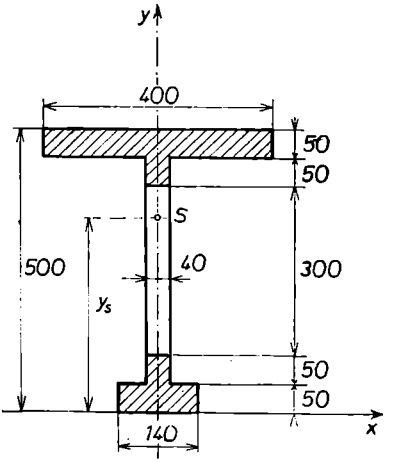
Ebből:

$$\varrho = \sqrt{4r^3 - \frac{6M}{\pi\tau_f}};$$

a külső képlékeny réteg $v = r - \varrho$ *vastagságú.*



13. ábra



14. ábra

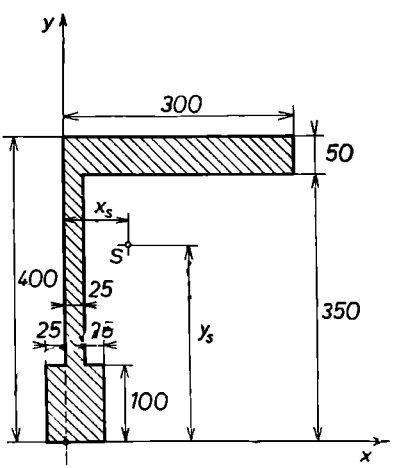
2. Meghatározandó a 13. ábrán bemutatott tartó keresztmetszetének l mérete úgy, hogy a semleges tengely egybeessék az x tengellyel.

3. Meghatározandó a 14. ábrán bemutatott idom súlypontjának helye.

4. Meghatározandó a 15. ábrán bemutatott idom súlypontjának helye.

5. Meghatározandó a $z^2 = 4y$ egyenletű parabola (16. ábra) alatti síkrész területe és súlypontjának helye.

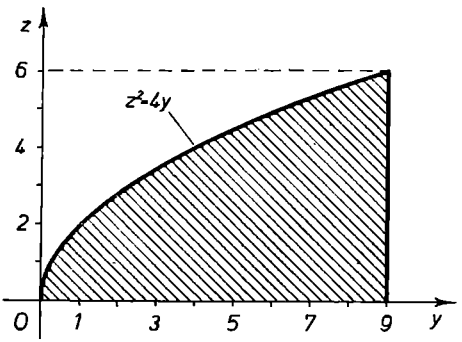
6. Meghatározandó a 17. ábrán bemutatott idomnak az x tengelyre vonatkozó elsőrendű (statikai) nyomatéka és súlypontjának helye. Hogyan változik a súlypontnak az x tengelytől számított y_s távolsága, ha a b megnyúlik, de a h magasság és a δ szélesség nem változik?



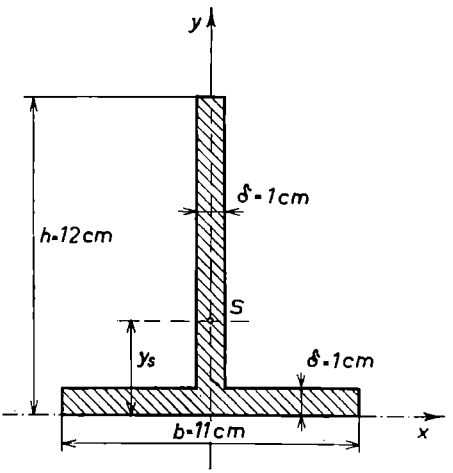
15. ábra

d) Guldin tételei

A *forgástest* felszíne és térfogata, valamint a görbeív alatti terület elsőrendű nyomatéka ismeretében könnyen beláthatók *Guldin* alábbi tételei.



16. ábra



17. ábra

α) Első tétel

α_1) *Homogén forgásfelület felszíne egyenlő a meridiángörbe ívhosszának és a súlypontja által forgatáskor leírt kör kerületének szorzatával* (a meridiángörbe nem metszheti a forgástengelyt). Betűkkel:

$$S \cdot 2\pi y_s = 2\pi \int_a^b y \, ds = F.$$

A meridiángörbe elsőrendű nyomatéka éppen $M_x = \int_a^b y \, ds$ lévén, a tétel *egyszerűbben* így írható (2π-vel egyszerűsítve):

$$S y_s = M_x.$$

Ez láthatóan megegyezik a meridiángörbe súlyponti képletével.

α_2) Az előbbi egyenlőség tetszőleges $\alpha < 2\pi$ számmal való szorzása után is fennáll; ennek megfelelően *a tétel akkor is igaz, ha a meridiángörbét 2π helyett csak α szöggel forgatjuk el.*

A tétel segítségével, *az S, y_s és F közül kettő ismeretében, a harmadikat meghatározhatjuk.* Egyszerűbb esetekben e két ismerthez is integrálás nélkül, elemi meggondolások alapján jutunk.

β) Második tétel

β_1) *Homogén forgástest térfogata egyenlő a meridiángörbe alatti területnek és a súlypontja által forgatás közben leírt kör kerületének szorzatával* (a meridiángörbe nem metszheti a forgástengelyt). Betűkkel:

$$T \cdot 2\pi y_s = \pi \int_a^b y^2 \, dx = V.$$

A meridiángörbe alatti terület elsőrendű nyomatéka éppen $M_x = \frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx$ lévén, a tétel *egyszerűbben* így írható (2π-vel egyszerűsítve):

$$Ty_s = M_x.$$

Ez láthatóan megegyezik a meridiángörbe alatti terület súlyponti képletével.

β_2) Az α_2)-ben mondottak értelemszerűen itt is *igazak*.

Példák és feladatok

1. Kiszámítandó a *tórusz* felszíne és köbtartalma. [E testet úgy kapjuk, hogy az a sugarú kört az x tengely körül megforgatjuk a 18. ábrán látható módon; a kör középpontja b ($< a$) sugarú körön forog.]

Az y_s most nyilván egyenlő b-vel, mert a kör súlypontja a középpontjában van, a forgástengelytől b távolságra. Tehát:

$$F = 2\pi y_s \cdot S = 2\pi b \cdot 2a\pi = 4ab\pi^2;$$
$$V = 2\pi y_s \cdot T = 2\pi b \cdot a^2\pi = 2a^2b\pi^2.$$

2. Egy a féltengelyű *asztroist* megforgatunk az egyik csúcsán átmenő és egyik tengelyével párhuzamos egyenes körül. Mekkora az így keletkező forgástest felszíne és térfogata? (L. a 19. ábrát!)

A súlyponti ordináta most a. Az asztrois kerülete: $S = 6a$ (l. 4. § α) 2. pl.-t), területe: $T = \frac{3}{8}a^2\pi$ (l. a 3. § *a*) α) 41., illetve δ) 4. pl.-t).

Így forgástestünk felszíne és térfogata:

$$F = 2\pi y_s \cdot S = 2\pi a \cdot 6a = 12a^2\pi;$$
$$V = 2\pi y_s \cdot T = 2\pi a \cdot \frac{3}{8}a^2\pi = \frac{3}{4}a^3\pi^2.$$

3. A 20. ábrán látható síkrészt megforgatjuk az y tengely körül: kiszámítandó az így keletkező forgástest térfogata.

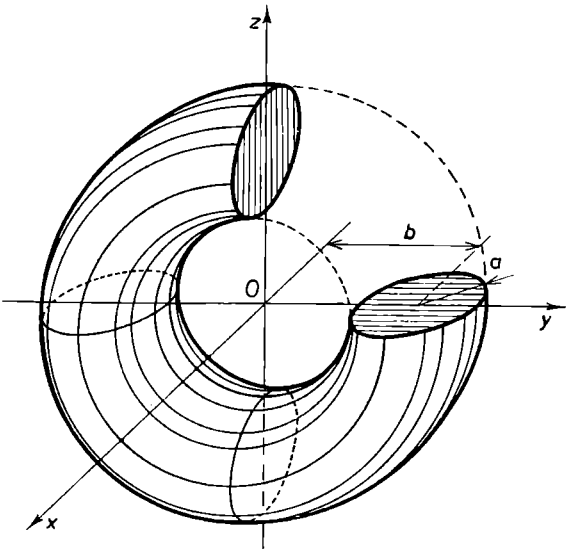
A görbe szimmetrikus az x tengelyre és az $x = \pi$ egyenesre, emiatt a súlypont az $S(\pi, 0)$ pont. A területét (mint a felső ág és az x tengely közti terület kétszeresét) határozott integrállal számítjuk ki:

$$T = 2\int_0^{2\pi} \sin\frac{x}{2}\,dx = 4\left[-\cos\frac{x}{2}\right]_0^{2\pi} = 8.$$

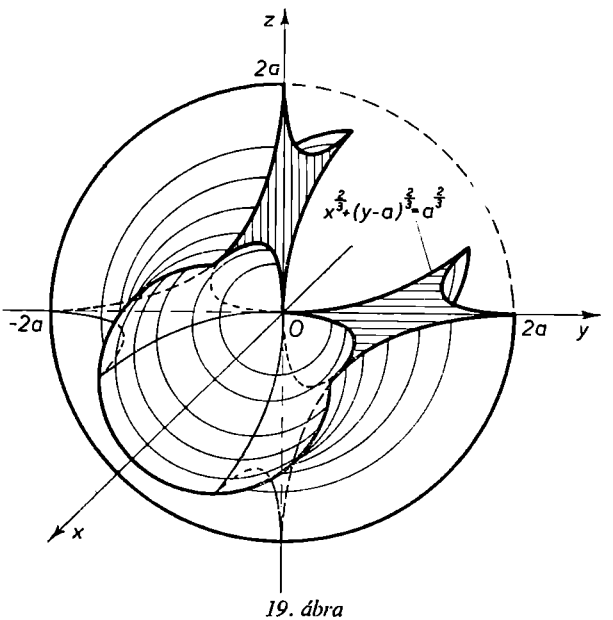
Innen (y tengely körüli forgatás miatt most a súlypont x_s koordinátájával dolgozunk):

$$V = 2\pi x_s \cdot T = 16\pi^2.$$

4. A *szabályos a oldalú hatszöget* megforgatjuk az egyik oldala körül. Határozzuk meg az így nyert test köbtartalmát.



18. ábra



19. ábra

5. Az $AA_1 = 2a$ és $BB_1 = 2b$ tengelyű *ellipszist* megforgatjuk az AA_1 tengellyel párhuzamos, tőle $3b$ távolságra levő egyenes körül. Határozzuk meg az így nyert test térfogatát.

6. Az *asztroist* megforgatjuk két szomszédos csúcsára illeszkedő tengely körül. Határozzuk meg az így nyert test térfogatát és felszínét.

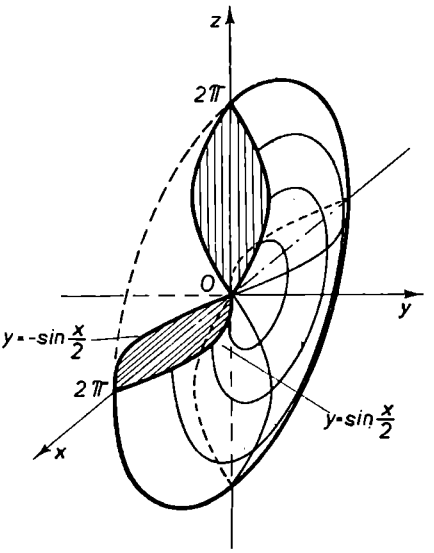
7. Az

$$x = a(t - \sin t), \qquad y = a(1 - \cos t)$$

és

$$x = a(t - \sin t), \qquad y = -a(1 - \cos t)$$

*cikloi*sok egy-egy teljes íve által határolt síkidomot megforgatjuk az ordinátatengely körül. Határozzuk meg az így nyert test térfogatát és felszínét.



20. ábra

8. A *négyzet*et az egyik csúcsán átmenő és síkjában fekvő egyenes körül megforgatjuk. Az egyenes és a négyzet milyen viszonylagos helyzeténél lesz a nyert forgástest köbtartalma legnagyobb?

9. Oldjuk meg az előző feladatot *egyenlő oldalú háromszög* esetére.

e) Folytonos homogén tömegeloszlás másodrendű vagy tehetetlenségi (inercia-) nyomatéka

α) Homogén síkrész másodrendű nyomatéka

α_1) Görbe alatti terület másodrendű nyomatéka. Az $y = f(x)$ explicit egyenletű görbe $a \leqq x \leqq b$ szakasz menti darabja alatti homogén terület másodrendű nyomatékát keressük az x, illetve y tengelyre vonatkozólag. Az I_y *nyomaték differenciálja* az $[x, x + dx]$ szakaszon:

$$dI_y(x) = dT(x)x^2 = y(x)\,dx \cdot x^2,$$

ennélfogva *a keresett nyomaték:*

$$I_y(a, b) = \int_a^b x^2 y(x)\,dx.$$

E formulát alkalmazva egy a és b élű (befogójú) homogén derékszögű négyszög (háromszög) a élére (befogójára) mint tengelyre vonatkozólag, a következő eredményhez jutunk:

$$I_{an} = \frac{1}{3}ab^3 = \frac{1}{3}T_n b^2,$$

$$\left(I_{ah} = \frac{1}{12}ab^3 = \frac{1}{6}T_h b^2 = \frac{1}{4}I_{an}\right).$$

Ezen eredményre támaszkodva, az I_x *nyomatékra vonatkozólag írhatjuk:*

$$dI_x(x) = \frac{1}{3}\, dT(x)\, y^2(x) = \frac{1}{3}\, y\,(x)\, dx \cdot y^2(x),$$

következésképpen:

$$I_x(a, b) = \frac{1}{3} \int_a^b y^3(x)\, dx.$$

Az inerciasugarak így alakulnak:

$$i_x = \sqrt{\frac{I_y(a, b)}{T(a, b)}}, \qquad i_y = \sqrt{\frac{I_x(a\ b)}{T(a, b)}},$$

ahol $T(a, b) = \int_a^b y(x)\, dx$ az említett síkrész területi mérőszáma.

Az adott görbe alatti területnek az origóra vonatkozó poláris másodrendű nyomatéka:

$$I_0(a, b) = I_x(a, b) + I_y(a, b) = \int_a^b \left[\frac{1}{3}\, y^2(x) + x^2\right] y(x)\, dx.$$

Olykor (l. bővebben a 3. §-ban és a 7. § *c) α)*-ban) előnyösebb az *x tengellyel párhuzamos* és

$$dT(y) = x(y)\, dy$$

mérőszámú területelemmel, s ennek megfelelően

$$dI_x(y) = dT(y)\, y^2 = x(y)\, y^2\, dy,$$

illetve

$$dI_y(y) = \frac{1}{3}\, dT(y) x^2 = \frac{1}{3}\, x^3(y)\, dy$$

*nyomatéki differenciálok*kal dolgozni, $A = f(a)$ és $B = f(b)$ határok között.

Az $x = x(t)$, $y = y(t)$ paraméteres megadás esetén *képleteink* a következő alakot öltik:

$$I_x(a, b) = \frac{1}{3} \int_a^b y^3(t)\, \dot{x}(t)\, dt, \qquad I_y(a, b) = \int_a^b x^2(t)\, y(t)\, \dot{x}(t)\, dt.$$

α_2) Szektorterület másodrendű nyomatéka. A *nyomaték differenciálja* a $[\varphi, \varphi + d\varphi]$ szögben, polárkoordinátás megadás esetén:

$$dI_y(\varphi) = \int_0^{r(\varphi)} \varrho\, d\varphi\, d\varrho \cdot \varrho^2 \cos^2 \varphi = \cos^2 \varphi\, d\varphi \int_0^{r(\varphi)} \varrho^3\, d\varrho =$$

$$= \frac{1}{4}\, r^4(\varphi) \cos^2 \varphi\, d\varphi = \frac{1}{2}\, r^2(\varphi)\, d\varphi \cdot \frac{1}{2}\, r^2(\varphi) \cos^2 \varphi = dT(\varphi) \left(\frac{r(\varphi) \cos \varphi}{\sqrt{2}}\right)^2$$

és hasonlóan:

$$dI_x(\varphi) = \frac{1}{4} r^4(\varphi) \sin^2 \varphi \, d\varphi = dT(\varphi) \left(\frac{r(\varphi) \sin \varphi}{\sqrt{2}} \right)^2 .$$

Ezek alapján az $r = r(\varphi)$ görbe, valamint az α és β hajlásszögű rádiuszvektor határolta *szektorterület másodrendű nyomatékai:*

$$I_x(\alpha, \beta) = \frac{1}{4} \int_\alpha^\beta r^4(\varphi) \sin^2 \varphi \, d\varphi, \qquad I_y(\alpha, \beta) = \frac{1}{4} \int_\alpha^\beta r^4(\varphi) \cos^2 \varphi \, d\varphi.$$

Paraméteres megadás esetén [az $x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t) = r^2(t)$ körülményre visszaemlékezve] *formuláink* így alakulnak:

$$I_x(\gamma, \delta) = \frac{1}{4} \int_\gamma^\delta y^2(t)[x(t)\, y(t) - x(t)\, y(t)]\, dt,$$

és

$$I_y(\gamma, \delta) = \frac{1}{4} \int_\gamma^\delta x^2(t)[x(t)\, \dot{y}(t) - \dot{x}(t)\, y(t)]\, dt.$$

Végül $y = f(x)$ explicit megadás *esetén:*

$$I_x(a, b) = \frac{1}{4} \int_a^b y^2(x)[xy'(x) - y(x)]\, dx, \qquad I_y(a, b) = \frac{1}{4} \int_a^b x^2[xy'(x) - y(x)]\, dx.$$

β) Homogén görbedarab másodrendű nyomatéka

β_1) Explicit megadás. A *nyomaték differenciálja* nyilván:

$$dI_x(x) = ds(x)\, y^2(x), \qquad dI_y(x) = ds(x)\, x^2.$$

Az $a \leqq x \leqq b$ szakasz menti *görbedarab másodrendű nyomatékai* tehát:

$$I_x(a, b) = \int_a^b y^2(x)\sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx, \qquad I_y(a, b) = \int_a^b x^2\sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx.$$

β_2) Paraméteres megadás esetén:

$$I_x(\gamma, \delta) = \int_\gamma^\delta y^2(t)\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\, dt, \qquad I_y(\gamma, \delta) = \int_\gamma^\delta x^2(t)\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}(t)}\, dt.$$

β_3) Polárkoordinátás megadás esetén:

$$I_x(\alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta r^2(\varphi) \sin^2 \varphi \sqrt{r^2(\varphi) + \dot{r}^2(\varphi)}\, d\varphi,$$

$$I_y(\alpha, \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) \cos^2 \varphi \sqrt{r^2(\varphi) + \dot{r}^2(\varphi)}\, d\varphi.$$

γ) Homogén forgástest másodrendű nyomatéka

Az $y = f(x)$ görbe $a \leqq x \leqq b$ szakasz menti darabját forgassuk meg az x tengely körül. Erre vonatkozólag a másodrendű *nyomaték differenciálja:*

$$dI_x(x) = \int_0^{y(z)} 2\pi\eta\, d\eta\, dx \cdot \eta^2 = \frac{\pi}{2} y^4(x)\, dx = \pi y^2(x)\, dx \left[\frac{y(x)}{\sqrt{2}}\right]^2.$$

A forgástest említett darabjának másodrendű nyomatéka a forgástengelyre vonatkozólag tehát így alakul:

$$I_x(a, b) = \frac{\pi}{2} \int_a^b y^4(x)\, dx.$$

δ) Homogén forgásfelület másodrendű nyomatéka

A forgástengelyre vonatkozó másodrendű *nyomaték differenciálja* nyilván:

$$dI_x(x) = 2\pi\, y(x)\, ds(x) \cdot y^2(x),$$

következésképpen *a nyomaték így írható:*

$$I_x(a, b) = 2\pi \int_a^b y^3(x) \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx.$$

ε) Speciális homogén térbeli alakzat másodrendű nyomatéka

A másodrendű nyomaték valamely tengelyre vonatkozólag csupán olyan további speciális esetekben számítható egyszeres integrálás útján, amelyekben sikerül *felírni egy változó segítségével a nyomaték differenciálját.* Az ide vonatkozó példákra utalunk!

ζ) Steiner tétele

Ha ismeretes egy folytonos homogén tömegeloszlás I_s másodrendű nyomatéka egy súlyponti tengelyére vonatkozólag, akkor a vele párhuzamos és tőle d távolságban levő tengelyre vonatkozó másodrendű nyomaték:

$$I = I_s + d^2 m,$$

ahol m az összes tömeg. A δ állandó sűrűséget ismét 1-nek vettük a példákban. A tételt ily módon szintén homogén síkrészekre, görbedarabokra, felületekre, testekre alkalmaztuk.

A tétel gyakran igen előnyösen használható. Előfordul *nagy d esetén,* hogy $I_s \ll d^2 m$, azaz $I \approx d^2 m$, vagyis ilyenkor a kérdezett másodrendű nyomaték közelítőleg az ún. *Steiner*-taggal egyenlő.

Példák és feladatok

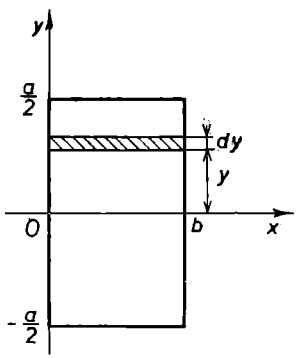
α | **1.** Mekkora az a, b élű *téglalap*terület x szimmetriatengelyére vonatkozó másodrendű nyomatéka?

Esetünkben (21. ábra):

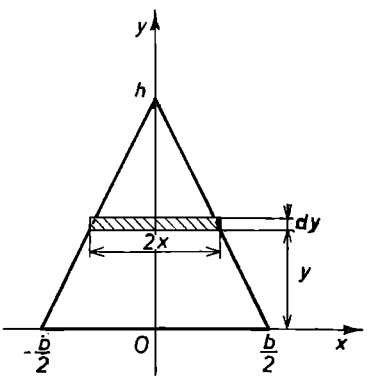
$$I_x = 2\int_0^{a/2} y^2\,dT = 2\int_0^{a/2} y^2 \cdot b\,dy = \frac{2b}{3}\left[y^3\right]_0^{a/2} = \frac{ba^3}{12} = \frac{Ta^2}{12}.$$

Ezzel:

$$i_x^2 = \frac{I_x}{T} = \frac{a^2}{12}, \quad \text{azaz} \quad i_x = \frac{a}{2\sqrt{3}}.$$



21. ábra



22. ábra

2. Mekkora az ábrázolt *egyenlő szárú háromszög* területének alapjára vonatkozó másodrendű nyomatéka? (22. ábra.)

Itt:

$$y = -\frac{h}{b/2}x + h = -\frac{2h}{b}x + h \quad \text{és} \quad dT = 2x\,dy = 2(h-y)\frac{b}{2h}\,dy.$$

Ezzel:

$$I_x = \int_{y=0}^{h} y^2\,dT = \frac{b}{h}\int_0^h y^2(h-y)\,dy =$$

$$= \frac{b}{h}\left[h\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_0^h = \frac{bh^3}{12} = \frac{Th^2}{6}.$$

Végül:

$$i_x^2 = \frac{M_x}{T} = \frac{h^2}{6}, \qquad i_x = \frac{h}{\sqrt{6}}.$$

3. Meghatározandó az r sugarú *kör*terület inercianyomatéka egy átmérőjére vonatkozólag (23. ábra).

Jelen esetben:

$$y=\sqrt{r^2-x^2}, \qquad x=\sqrt{r^2-y^2} \quad \text{és} \quad dT=2x\,dy=2\sqrt{r^2-y^2}\,dy.$$

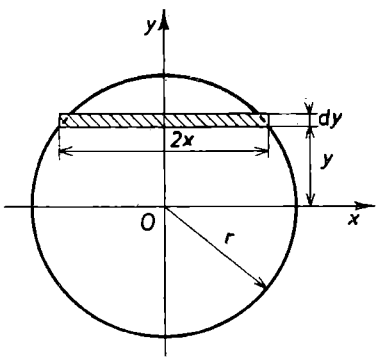
Ezek alapján (tekintettel a szimmetriára):

$$I_x=2\int_{y=0}^{r} y^2\cdot 2\sqrt{r^2-y^2}\,dy=4\int_0^r y^2\sqrt{r^2-y^2}\,dy=4r^4\int_{t=0}^{\pi/2}\sin^2 t\cos^2 t\,dt=$$

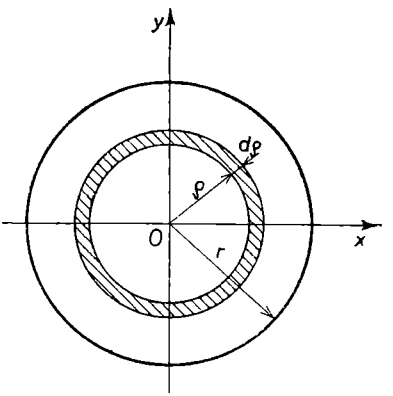
$$=r^4\int_0^{\pi/2}\sin^2 2t\,dt=\frac{r^4}{2}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 4t)\,dt=\frac{r^4}{2}\left[t-\frac{\sin 4t}{4}\right]_0^{\pi/2}=\frac{r^4\pi}{4}=\frac{Tr^2}{4}.$$

Így az inerciasugár:

$$i_x=\frac{r}{2}.$$



23. ábra



24. ábra

4. Meghatározandó az r sugarú *kör*terület középpontjára vonatkozó *poláris* inercianyomatéka (24. ábra).

Esetünkben:

$$dT=2\varrho\pi\,d\varrho.$$

Ezzel:

$$I_0=\int_{\varrho=0}^{r}\varrho^2\cdot 2\varrho\pi\,d\varrho=\frac{r^4\pi}{2}=\frac{Tr^2}{2}.$$

Így:

$$i_0=\frac{r}{\sqrt{2}}.$$

5. Mekkora az $y^2 = 2px$ *parabola*görbe és az $x = x_1$ egyenes közti síkrész inercianyomatéka?

Most:

$$I_x = \frac{1}{3}\int_{x=0}^{x_1} y(x)^3\,dx = \frac{(2p)^{3/2}}{3}\int_0^{x_1} x^{3/2}\,dx = \frac{(2p)^{3/2}\cdot 2}{15}x_1^{3/2} = \frac{2}{15}x_1 y_1^3,$$

és

$$I_y = \int_{x=0}^{x_1} x^2 y(x)\,dx = \sqrt{2p}\int_0^{x_1} x^{5/2}\,dx = \frac{2\sqrt{2p}}{7}x_1^{7/2} = \frac{2}{7}x_1^3 y.$$

6. Mekkora az $y^2 = 2x$ *parabola*görbe és az $x = 8$ egyenes közötti síkrész I_x inercianyomatéka? (25. ábra.)

Esetünkben:

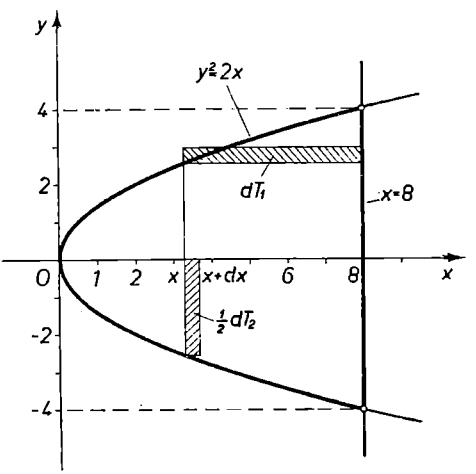
$$dT_1 = (8 - x)\,dy = \left(8 - \frac{y^2}{2}\right)dy;\quad y(8) = 4.$$

Tehát:

$$I_x = 2\int_{y=0}^{4} y^2\left(8 - \frac{y^2}{2}\right)dy = 2\left[\frac{8y^3}{3} - \frac{y^5}{10}\right]_0^4 = 136{,}5.$$

Más területelemmel:

$$dT_2 = 2y\,dx = 2\sqrt{2x}\,dx, \qquad dI_x = \frac{(2y)^3\,dx}{12}.$$



25. ábra

Így:

$$I_x = \int_{x=0}^{8}\frac{(2y)^3}{12}\,dx = \frac{2}{3}\int_{x=0}^{8}(2x)^{3/2}\,dx = \frac{4\sqrt{2}}{3}\int_{x=0}^{8} x^{3/2}\,dx =$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{3}\left[\frac{2}{5}x^{5/2}\right]_0^8 = 136{,}5.$$

7. Mekkora az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ *ellipszis* inercianyomatéka tengelyeire és középpontjára vonatkozólag?

Esetünkben (tekintettel az ellipszis alsó és felső felére):

$$I_x = 2 \cdot \frac{1}{3} \int_{x=-0}^{+a} \frac{b^3}{a^3} (a^2 - x^2)^{3/2} \, dx = \frac{2b^3}{3a^3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} a^4 \cos^4 t \, dt =$$

$$= \frac{4}{3} ab^3 \int_0^{\pi/2} \cos^4 t \, dt = \frac{4}{3} ab^3 \cdot \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{ab^3 \pi}{4} = T \frac{b^2}{4}.$$

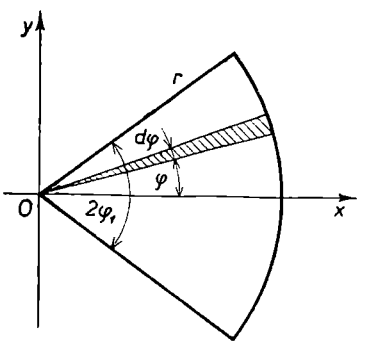
(Az $x = \sin t$ helyettesítést alkalmaztuk és felhasználtuk az 1. § *d) β)* 1. pl. eredményét.) Hasonlóan:

$$I_y = \frac{2}{3} \int_{x=-b}^{+b} \frac{a^3}{b^3} (b^2 - y^2)^{3/2} \, dy = \frac{ba^3 \pi}{4} = T \frac{a^2}{4}.$$

A poláris inercianyomaték:

$$I_0 = I_x + I_y = \frac{ab\pi}{4} (a^2 + b^2) = T \frac{a^2 + b^2}{4}.$$

8. Kiszámítandó az r sugarú, $2\varphi_1$ középponti szögű *körszektor* I_x, I_y és I_0 intercianyomatéka (26. ábra).



26. ábra

Jelen esetben:

$$I_x = \frac{1}{4} \int_{\varphi=-\varphi_1}^{+\varphi_1} r^4 \sin^2 \varphi \, d\varphi = \frac{r^4}{2} \int_0^{\varphi_1} \sin^2 \varphi \, d\varphi =$$

$$= \frac{r^4}{4} \int_0^{\varphi_1} (1 - \cos 2\varphi) \, d\varphi =$$

$$= \frac{r^4}{4} (\varphi_1 - \sin \varphi_1 \cos \varphi_1),$$

továbbá:

$$I_y = \frac{1}{4} \int_{-\varphi_1}^{+\varphi_1} r^4 \cos^2 \varphi \, d\varphi = \frac{r^4}{4} \int_0^{\varphi_1} (1 + \cos 2\varphi) \, d\varphi = \frac{r^4}{4} (\varphi_1 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_1).$$

Végül:

$$I_0 = I_x + I_y = \frac{r^4 \varphi_1}{2} = \int_0^{\varphi} 2\varrho\varphi_1 \, d\varrho \cdot \varrho^2 = \frac{r^4 \varphi_1}{2}.$$

9. Mekkora az $r=a\sqrt{\cos 2\varphi}$ *lemniszkáta* kvadránsa alatti terület inercianyomatéka? Az adott formula szerint:

$$I_x=\frac{1}{4}\int_0^{\pi/4} r(\varphi)^4\sin^2\varphi\,d\varphi=\frac{a^4}{4}\int_0^{\pi/4}\cos^2 2\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi=$$

$$=\frac{a^4}{16}\int_{\varphi=0}^{\pi/4}\cos^2 2\varphi(1-\cos 2\varphi)2\,d\varphi=\frac{a^4}{16}\int_{t=0}^{\pi/2}(\cos^2 t-\cos^3 t)\,dt=$$

$$=\frac{a^4}{16}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right]=\frac{3\pi-8}{192}a^4;$$

$$I_y=\frac{1}{4}\int_0^{\pi/4} r(\varphi)^4\cos^2\varphi\,d\varphi=\frac{a^4}{16}\int_{t=0}^{\pi/2}(\cos^2 i+\cos^3 t)\,dt=\frac{3\pi+8}{192}a^4;$$

$$I_0=\frac{\pi a^3}{32}.$$

10. *a)* Határozzuk meg egy a és b befogójú *derékszögű háromszög*nek az a befogóra vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát.

b) Határozzuk meg egy a alapú és m magasságú *egyenlő szárú háromszög*nek alapjára vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát.

11. Határozzuk meg az *egyenlő szárú trapéz* (párhuzamos oldalai: a és b, magassága m) középvonalára, valamint szimmetriatengelyére vonatkozó tehetetlenség nyomatékát.

12. Határozzuk meg az $y=x^2$ és $y=\sqrt{x}$ *parabolák* által határolt síkrésznek az x és y tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát.

Határozzuk meg az alábbi görbék és egyenesek határolta síkrészeknek az x és y tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát:

13. $y=x^2$; $y=0$, $x=a$.

14. $y=x^3$; $y=0$, $x=a$.

15. $y=\frac{1}{x}$; $x=1$, $x=2$, $y=0$.

16. $y=x^3$; $x=0$, $y=a$.

17. $y=\sqrt{x}$; $x=a$, $y=0$.

18. $y=x^2$; $y=a$, $x=0$.

19. Mekkora az $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ paraméteres egyenletrendszerű *asztrois* által határolt síkrész axiális és poláris inercianyomatéka?

Itt (tekintettel a szimmetriákra):

$$I_x=-\frac{4}{3}\int_{t=\pi/2}^{0} a^3\sin^9 t\cdot 3a\cos^2 t\sin t\,\mathrm{dt}=+4a^4\int_0^{\pi/2}(\sin^{10} t-\sin^{12} t)\,dt.$$

Az 1. § *d)* β 1. pl. eredményében megadott formula szerint:

$$I_x = 4a^4\left(\frac{9\cdot 7\cdot 5\cdot 3\cdot 1}{10\cdot 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2} - \frac{11\cdot 9\cdot 7\cdot 5\cdot 3\cdot 1}{12\cdot 10\cdot 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2}\right)\frac{\pi}{2} =$$

$$= 4a^4\left(\frac{9\cdot 7}{2\cdot 8\cdot 2\cdot 4\cdot 2} - \frac{11\cdot 3\cdot 7}{4\cdot 2\cdot 8\cdot 2\cdot 4\cdot 2}\right)\frac{\pi}{2} = \frac{21}{512}\pi a^4.$$

Szimmetriaokok miatt:

$$I_y = \frac{21}{512}\pi a^4 \quad \text{és} \quad I_0 = I_x + I_y = \frac{21}{256}\pi a^4.$$

20. Adva az $x = -b(\pi - t + \sin t)$, $y = b(1 - \cos t)$ egyenletrendszerű *ciklois*; ennek szimmetriatengelye az y tengely. Mekkora a félív alatti terület inercianyomatéka az x és y tengelyre vonatkozólag?

Esetünkben:

$$I_x = \frac{1}{3}\int_{t=0}^{\pi} b^4(1-\cos t)^4\,dt = \frac{16b^4}{3}\int_0^{\pi}\sin^8\frac{t}{2}\,dt =$$

$$= \frac{32b^4}{3}\int_0^{\pi}\sin^8\frac{t}{2}\cdot\frac{dt}{2} = \frac{32b^4}{3}\int_0^{\pi/2}\sin^8 u\,du = \frac{35\pi b^4}{24}.$$

Hasonlóan:

$$I_y = \int_0^{\pi} b^2(\pi - t + \sin t)^2\cdot b^2(1-\cos t)^2\,dt =$$

$$= b^4\int_0^{\pi}(\pi - t + \sin t)^2(1-\cos t)^2\,dt.$$

A számítást elvégezve:

$$I_y = \left(\frac{\pi^2}{2} - \frac{35}{24}\right)\pi b^4.$$

A poláris inercianyomaték pedig:

$$I_0 = \frac{1}{2}\pi^3 b^4.$$

β | **1.** Mekkora az a sugarú, $2\varphi_1$ középponti szögű *körív* inercianyomatéka szimmetriatengelyére és a húrjával párhuzamos átmérőre vonatkozólag? (27. ábra.)

Esetünkben:

$$r(\varphi) = a, \qquad \dot{r}(\varphi) = 0.$$

Így:

$$I_x = \int_{\varphi=-\varphi_1}^{\varphi_1} r(\varphi)^2 \sqrt{r^2(\varphi) + \dot{r}^2(\varphi)} \sin^2 \varphi \, d\varphi =$$

$$= 2a^3 \int_0^{\varphi_1} \sin^2 \varphi \, d\varphi = a^3 \int_0^{\varphi_1} (1 - \cos 2\varphi) \, d\varphi = a^3(\varphi_1 - \sin \varphi_1 \cos \varphi_1);$$

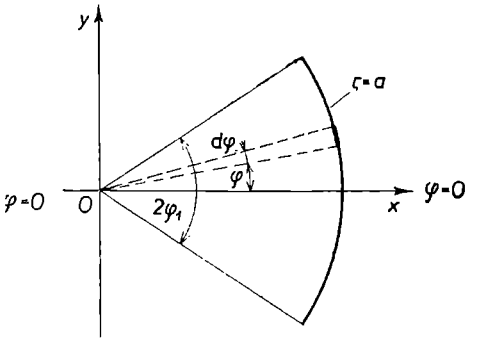
továbbá:

$$I_y = \int_{\varphi=-\varphi_1}^{\varphi_1} a^3 \cos^2 \varphi \, d\varphi = a^3(\varphi_1 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_1).$$

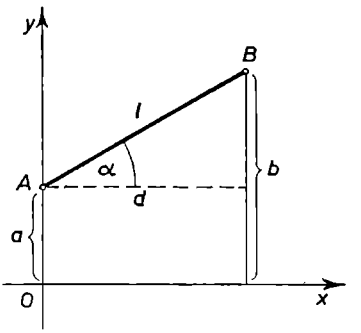
Végül:

$$I_0 = I_x + I_y = 2a^3\varphi_1 = 2\varphi_1 a \cdot a^2.$$

2. Határozzuk meg az $AB = l$ *egyenesdarab* tehetetlenségi nyomatékát egy vele közös síkban fekvő tengelyre (ezt választjuk x tengelynek) vonatkozólag, amennyiben A végpontja a egységnyi, B végpontja b egységnyi távolságra van e tengelytől. (L. a 28. ábrát.)



27. ábra



28. ábra

Vezessük be a következő jelöléseket.

$$d = \sqrt{l^2 - (b-a)^2}, \qquad m = \operatorname{tg} \alpha = \frac{b-a}{d}, \qquad y = mx + a.$$

Ezek alkalmazásával, a megadott formula értelmében írhatjuk:

$$I_x = \int_0^d (mx+a)^2 \sqrt{1+m^2} \, dx = \frac{\sqrt{1+m^2}}{3m} \Big[(mx+a)^3 \Big]_0^d = \frac{\sqrt{1+m^2}}{3m} [(md+a)^3 - a^3] =$$

$$= \frac{\sqrt{1+m^2}}{3m} (b^3 - a^3) = \frac{\sqrt{1 + \dfrac{(b-a)^2}{l^2-(b-a)^2}}}{3 \dfrac{(b-a)}{\sqrt{l^2-(b-a^2)}}} (b^3 - a^3) =$$

$$= \frac{l}{3\dfrac{b-a}{\sqrt{l^2-(b-a)^2}}}(b^3-a^3) = \frac{l}{3}\frac{b^3-a^3}{b-a} = \frac{l}{3}(a^2+ab+b^2).$$

3. Mekkora az *asztroisgörbe* ($x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$) egy negyedének I_x, I_y és I_0 inercianyomatéka?

Ez esetben:

$$ds = a^{1/3}x^{-1/3}\,dx, \qquad dI_x = y^2\,ds = (a^{2/3}-x^{2/3})^3 \cdot a^{1/3}x^{-1/3}\,dx.$$

Tehát:

$$I_x = \int_{x=0}^{a} a^{1/3}x^{-1/3}(a^2 - 3a^{4/3}x^{2/3} + 3a^{2/3}x^{4/3} - x^2)\,dx =$$

$$= a^{1/3}\left[\frac{3}{2}a^2x^{2/3} - \frac{9}{4}a^{4/3}x^{4/3} + \frac{3}{2}a^{2/3}x^2 - \frac{3}{8}x^{8/3}\right] =$$

$$= a^3\left(\frac{3}{2} - \frac{9}{4} + \frac{3}{2} - \frac{3}{8}\right) = a^3\,\frac{12-18+12-3}{8} = \frac{3}{8}a^3.$$

Továbbá:

$$I_y = \frac{3}{8}a^3,$$

szimmetriaokok miatt.

Végül:

$$I_0 = \frac{3}{4}a^3 = \frac{3}{2}a \cdot \frac{a^2}{2} = S_1\frac{a^2}{2}.$$

4. Mekkora a teljes *ciklois görbe* I_x inercianyomatéka?

Most:

$$ds = \sqrt{4b^2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt = \sqrt{2b^2(1-\cos t)}\,dt$$

és

$$dI_x = y^2(t)\,ds = \sqrt{2b}^3(1-\cos t)^{5/2}\,dt = 8b^3\sin^5\frac{t}{2}\,dt.$$

Ezzel:

$$I_x = 8b^3\int_0^{2\pi}\sin^5\frac{t}{2} = 16b^3\cdot 2\int_0^{\pi}\sin^5\frac{t}{2}\,dt\cdot\frac{1}{2} = 32b^3\int_{u=0}^{\pi/2}\sin u\,du = 32b^3\,\frac{4\cdot 2}{5\cdot 3} = \frac{256}{15}b^3.$$

5. Határozzuk meg egy l hosszúságú, hosszához képest elhanyagolható keresztmetszetű homogén *rúd* tehetetlenségi nyomatékát egy, a végpontján áthaladó és rá merőleges tengelyre vonatkozóan.

6. Határozzuk meg egy kör alakúra hajlított *drótdarab* tehetetlenségi nyomatékát a kör egy átmérőjére vonatkozóan.

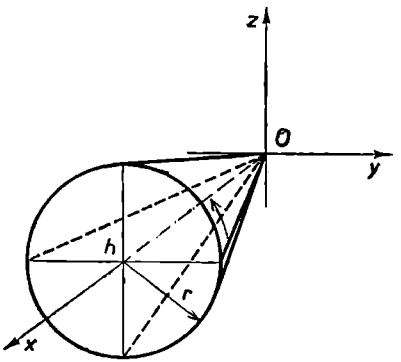
7. Határozzuk meg egy l hosszúságú *rúd* tehetetlenségi nyomatékát egy, a rúd egyik végpontján áthaladó, a rúddal α szöget bezáró tengelyre vonatkozóan. (A rúd vastagsága hosszához viszonyítva elhanyagolható.)

γ | 1. Mekkora az r alapkörsugarú, h magasságú *egyenes körkúptest* inercianyomatéka tengelyére vonatkozólag? (29. ábra.)

Itt $y=\frac{r}{h}x$, és ezzel:

$$I=\frac{\pi r^4}{2h^4}\int_{x=0}^{h}x^4\,dx=\frac{r^4\pi h}{10}=\frac{r^2\pi h}{3}\,\frac{3r^2}{10}=V\frac{3r^2}{10};$$

így: $i=r\sqrt{0{,}3}$.



29. ábra

2. Meghatározandó az $y^2=2px$ meridiángörbéjű *forgási paraboloidtest* inercianyomatéka az x tengelyre mint forgástengelyre vonatkozólag.

$$I_x=4p^2\,\frac{\pi}{2}\int_0^{x_1}x^2\,dx=4p^2\,\frac{x_1^3}{3}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi x_1 y_1^4}{6}.$$

3. Mekkora az $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellipszis x tengely körüli megforgatása útján nyert *forgási ellipszoidtest* I_x inercianyomatéka?

$$I_x=\frac{\pi}{2}\,\frac{b^4}{a^4}\int_{-a}^{+a}(a^2-x^2)^2\,dx=\frac{\pi b^4}{2a^4}\int_{-a}^{+a}(a^4-2a^2x^2+x^4)\,dx=$$

$$=2\frac{\pi b^4}{2a^4}\left[a^4x-\frac{2}{3}a^2x^3+\frac{1}{5}x^5\right]_0^a=\pi ab^4\left(\frac{15-10+3}{15}\right)=$$

$$=\frac{8\pi ab^4}{15}=\frac{4ab^2\pi}{3}\cdot\frac{2b^2}{5}=V\frac{2b^2}{5};\qquad i_x=b\sqrt{0{,}4}.$$

4. Meghatározandó az r sugarú, h magasságú *korongtest* inercianyomatéka tengelyére (itt a z tengelyre) vonatkozólag. A sűrűség $\delta\neq 1$. (30. ábra.)

Most:

$$dI_z=\delta\cdot 2\varrho\pi\,d\varrho\,h\cdot\varrho^2=2\pi\delta h\varrho^3\,d\varrho.$$

Tehát:

$$I_z=2\pi h\delta\int_{p=0}^{r}\varrho^3\,d\varrho=\delta\,\frac{r^4\pi h}{2}=m\,\frac{r^2}{2}.$$

5. Határozzuk meg egy R sugarú *gömbtest* tehetetlenségi nyomatékát egyik átmérőjére vonatkozóan.

***6.** Meghatározandó az $\frac{x^2}{a^2}+\frac{(y-e)^2}{b^2}=1$, $e \leqq b$ ellipszis x tengely körüli megforgatásával képzett *elliptikus gyűrűtest* inercianyomatéka a forgástengelyre vonatkozólag.

Legyen:

$$y_1 = e+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}; \qquad y_2 = e-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

Ezzel:

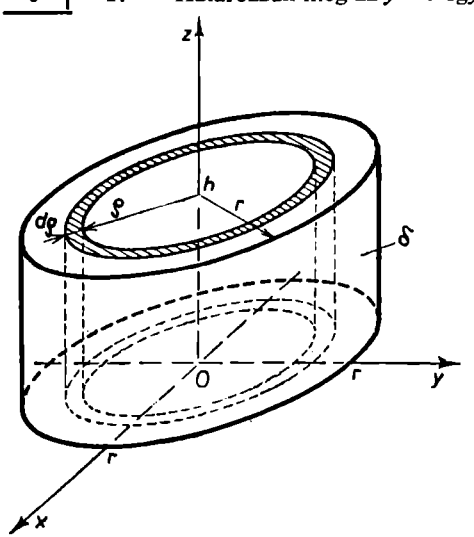
$$I_x = \frac{\pi}{2}\int_{x=-a}^{+a} y_1^4\,dx - \frac{\pi}{2}\int_{x=-a}^{+a} y_2^4\,dx = \frac{\pi}{2}\int_{-a}^{+a}(y_1^4-y_2^4)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_{-a}^{+a}(y_1^2+y_2^2)(y_1^2-y_2^2)\,dx =$$

$$= \frac{4\pi be}{a}\int_{-a}^{+a}\left[e^2+\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)\right]\sqrt{a^2-x^2}\,dx =$$

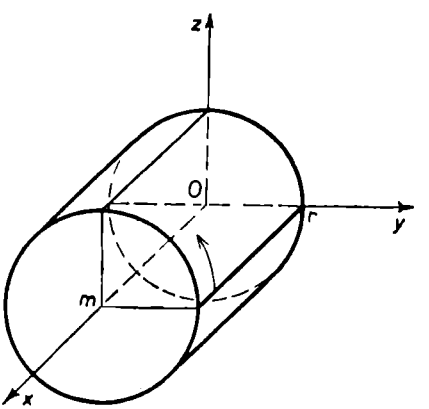
$$= e\,\frac{8\pi b}{a}\left[e^2\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx+\frac{b^2}{a^2}\int_0^a(a^2-x^2)^{3/2}\,dx\right] =$$

$$= 8\pi ab\left[e^2\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt + b^2\int_0^{\pi}\cos^4 t\,dt\right] = 8\pi abe\left[e^2\frac{\pi}{4}+b^2\frac{3\pi}{16}\right] = 2\pi^2 abe\left(\frac{3}{4}b^2+e^2\right).$$

δ | 1. Határozzuk meg az $y=r$ egyenes $0 \leqq x \leqq m$ darabjának az x tengely körüli megforgatásával képzett *egyenes körhengerfelület* inercianyomatékát a forgástengelyre vonatkozólag (31. ábra).



30. ábra



31. ábra

A megadott képlet szerint:

$$I_x = 2\pi \int_a^b y^3(x)\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx =$$

$$= 2\pi \int_0^m r^3\sqrt{1+0^2}\,dx = 2r^3m\pi = (2r\pi m)r^2 = F_p r^2,$$

ami előre várható volt. Így természetesen:

$$i_x^2 = \frac{I}{F_p} = r^2, \qquad i_x = r.$$

2. Határozzuk meg az $y = \frac{r}{m}x$ egyenes $0 \leqq x \leqq m$ darabjának az x tengely körüli megforgatásával képzett *egyenes körkúp* (palást-) felületének inercianyomatékát a forgástengelyre vonatkozólag.

Az előbbi módon:

$$I_x = 2\pi \int_0^m \frac{r^3}{m^3}x^3\sqrt{1+\frac{r^2}{m^2}}\,dx = 2\pi\frac{r^3}{m^3}\sqrt{1+\frac{r^2}{m^2}}\cdot\frac{1}{4}\Big[x^4\Big]_0^m =$$

$$= \frac{\pi r^3\sqrt{r^2+m^2}}{2} = r\pi\sqrt{r^2+m^2}\cdot\frac{r^2}{2} = F_p\frac{r^2}{2}.$$

Eszerint:

$$i_x^2 = \frac{I}{F_p} = \frac{r^2}{2}, \qquad i_x = \frac{r}{\sqrt{2}}.$$

3. Határozzuk meg az R sugarú *gömb* felületének a gömb egy átmérőjére vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát.

4. Határozzuk meg a *forgási asztroidfelület*nek a forgástengelyre vonatkozó inercianyomatékát.

Szimmetriaokok miatt:

$$I = 2\cdot 2\pi\int_0^{\pi/2} y^3\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt = 4\pi a^3\int_0^{\pi/2}\sin^9 t\sqrt{9a^2(\cos^4 t\sin^2 t+\sin^4 t\cos^2 t)}\,dt =$$

$$= 12a^4\pi\int_0^{\pi/2}\sin^{10} t\cos t\,dt = \frac{12a^4\pi}{11}.$$

ε—ζ | **1.** Mekkora az r alapkörsugarú és h magasságú *egyenes körhengertest* inercianyomatéka alapkörének egy átmérőjére (itt az x tengelyre) vonatkozólag. Most a sűrűség $\delta \neq 1$ (32. ábra).

A tömegelem (r sugarú, dz magasságú korong) inercianyomatéka az x tengellyel párhuzamos átmérőjére vonatkozólag: $\delta \frac{1}{4} r^4\pi\, dz$; *Steiner* tétele szerint a tőle z távolságban levő x tengelyre vonatkozólag pedig:

$$\delta \frac{1}{4} r^4\pi\, dz + \delta r^2\pi\, dz \cdot z^2 = dI_x.$$

Ezzel:

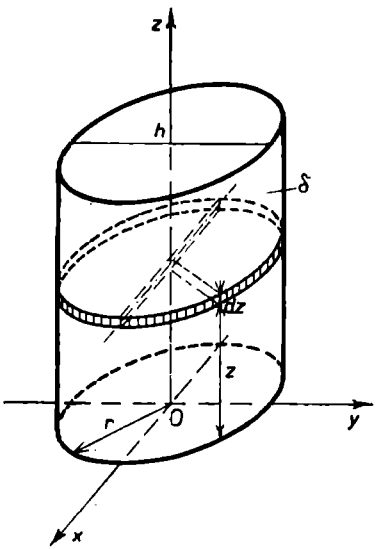
$$I_x = \int_{z=0}^{h} \delta \frac{1}{4} r^4\pi\, dz + \int_{z=0}^{h} \delta r^2\pi z^2\, dz = \frac{1}{4}\delta\pi r^4 h + \frac{1}{3}\delta\pi r^2 h^3 =$$

$$= \frac{r^2\pi h}{12}\delta(3r^2 + 4h^2) = V\delta\frac{3r^2 + 4h^2}{12} = m\frac{3r^2 + 4h^2}{12}.$$

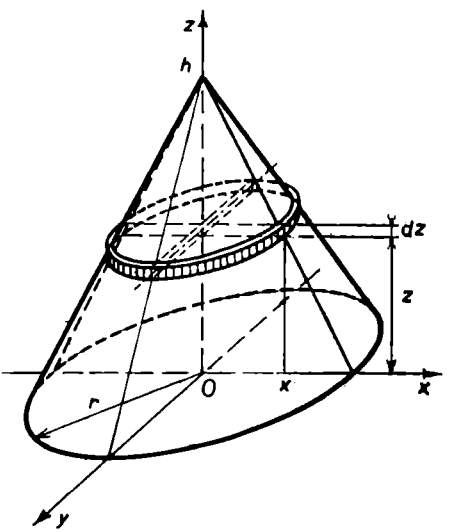
2. Meghatározandó az r alapkörsugarú, h magasságú *egyenes körkúp*test inercianyomatéka egy alapkörátmérőjére (itt az x tengelyre) vonatkozólag (33. ábra).

Eljárásunk ugyanaz, mint az előbbi példában.

$$x = -\frac{r}{h}z + r = \frac{r}{h}(h - z).$$



32. ábra



33. ábra

A tömegelem a dz vastagságú korong tömege: $\delta x^2\pi\, dz$; nyomatéka az x tengellyel párhuzamos tengelyére vonatkoztatva: $\frac{1}{4}\delta x^4\pi\, dz$; nyomatéka az x tengelyre vonatkozólag, *Steiner* tétele szerint:

$$\frac{1}{4}\delta x^4\pi\, dz + \delta x^2\pi\, dz \cdot z^2.$$

Így:

$$I_x = \int_{z=0}^{h} \frac{1}{4}\delta\pi x^4\,dz + \int_{z=0}^{h} \delta\pi x^2 z^2\,dz = \frac{1}{4}\delta\pi\frac{r^4}{h^4}\int_{z=0}^{h}(h-z)^4\,dz +$$

$$+\delta\pi\frac{r^2}{h^2}\int_{z=0}^{h} z^2(h-z)^2\,dz = \frac{1}{20}\delta\pi hr^4 + \frac{1}{30}\delta\pi r^2h^3 = \frac{1}{3}\delta\pi r^2h\left(\frac{3}{20}r^2 + \frac{1}{10}h^2\right) =$$

$$= m\frac{3r^2+2h^2}{20}.$$

3. Mekkora az a oldalú *négyzet* alakú síkidom inercianyomatéka egy oldalára vonatkozólag? (L. α) 1. pl., $a=b$.)

Jelen esetben:

$$I_s = \frac{a^4}{12}, \qquad d = \frac{a}{2}.$$

A *Steiner*-tétel szerint tehát:

$$I = \frac{a^4}{12} + \frac{a^2}{4}\cdot a^2 = \frac{1}{3}a^4.$$

4. Mekkora az R sugarú *kőrív* inercianyomatéka egy érintőjére vonatkozólag? (L. β) 6. pl.)

Esetünkben:

$$I_s = \pi R^3, \qquad d = R.$$

Steiner tétele szerint tehát:

$$I = \pi R^3 + R^2\cdot 2R\pi = 3R^3\pi.$$

5. Határozzuk meg egy R sugarú *gömbtest* inercianyomatékát egy érintőjére vonatkozólag. (L. γ) 5. pl.)

Most

$$I_s = \frac{8\pi R^5}{15}, \qquad d = R.$$

Így *Steiner* tétele szerint:

$$I = \frac{8\pi R^5}{15} + R^2\frac{4R^3\pi}{3} = \frac{28\pi R^5}{15}.$$

6. Mekkora az r alapkörsugarú, h magasságú *henger* palástfelszínének inercianyomatéka egy alkotójára vonatkozólag (a δ) 1. pl. alapján)?

Itt:

$$I_s = 2r^3\pi m, \qquad d = r, \qquad F = 2r\pi m.$$

A *Steiner*-tétel szerint tehát:

$$I = 2r^3\pi m + r^2\cdot 2r\pi m = 4r^3\pi m.$$

7. Határozzuk meg a *körterület* inercianyomatékát a kör egy érintőjére vonatkozólag. (Legyen a kör sugara r. Használjuk fel az α) 3. példát!)

8. Mekkora az *asztroisgörbe* inercianyomatéka egy csúcsán átmenő, szimmetriatengelyével párhuzamos egyenesre vonatkozólag? (Használjuk fel a β) 3. pl. eredményét!)

9. Meghatározandó a *hengertest* inercianyomatéka alkotójára vonatkozólag, ha az alapkör sugara r, magassága h.

10. Meghatározandó az R sugarú *gömbfelület*nek egy érintőjére vonatkozó inercianyomatéka.

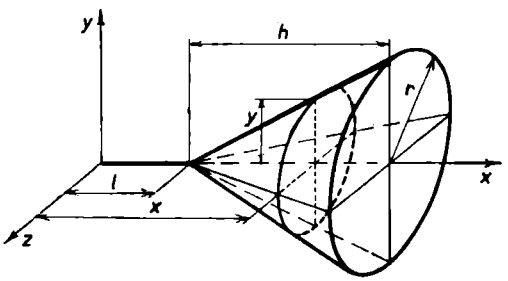
Műszaki alkalmazások

1. PÖRGETTYŰ TEHETETLENSÉGI NYOMATÉKA*

Adott r sugarú, h magasságú homogén egyenes körkúpból a csúcsába szúrt, elhanyagolható tömegű tű segítségével olyan pörgettyűt akarunk készíteni, amelynek a *tű hegyére vonatkozó tehetetlenségi ellipszoidja gömb* (34. ábra). Megvalósítható-e mindig a cél, s ha igen, *milyen hosszú legyen a tűnek a csigából kiálló része?*

A tű hegyére vonatkozó nyomatékok kiszámításához vegyük fel a koordináta-rendszert az ábrázolt módon. A tű hossza l. A látható szimmetriák, illetve a megkívánt tehetetlenségi gömb miatt:

$$I_y = I_z \quad \text{és} \quad I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0, \quad \text{továbbá} \quad I_x = I_y = I_z^{**}.$$



34. ábra

A γ) 1. példa értelmében:

$$I_x = \frac{3}{10} mr^2.$$

Az $I_y = I_z$ kiszámítása céljából először a $dm = \varrho \pi y^2 \, dx$ tömegű elemi tárcsának egy átmérőjére vonatkozó másodrendű nyomatékát írjuk fel:

$$dI_0 = dm \frac{y^2}{4} = \frac{\varrho \pi y^4 \, dx}{4},$$

majd a *Steiner*-tétel segítségével az y tengelyre vonatkozólag:

$$dI_y = dI_0 + dmx^2 = \frac{\varrho \pi y^4 \, dx}{4} + \varrho \pi y^2 x^2 \, dx.$$

Az $y = \frac{r}{h}(x - l)$ összefüggés és az $l \leqq x \leqq l + h$ körülmény felhasználásával írhatjuk végül:

$$I_y = \frac{3}{20} mr^2 + \frac{3}{5} mh^2 + \frac{3}{2} mhl + l^2 m = I_z.$$

Az $I_x = I_y = I_z$ követelményből kifolyólag:

$$\frac{3}{10} mr^2 = \frac{3}{20} mr^2 + \frac{3}{5} mh^2 + \frac{3}{2} mhl + l^2 m,$$

* L.: Elméleti fizikai feladatok.
** L. bővebben az A. X. kötetben.

ahonnan:

$$l=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{5}(4r^2-h^2)}-\frac{3}{4}h.$$

Eszerint $l>0$ csupán $h<\frac{r}{2}$ *esetben* lehetséges, *követelményünk* tehát csak ez esetben *teljesíthető.*

2. AUTÓ VISZONYLAGOS MOZGÁSA FORGÓ PÁLYÁN*

Adva egy I tehetetlenségi nyomatékú *körlap*, amely a rá merőleges, függőleges tengely körül súrlódásmentesen foroghat. A körlap egyik *húrján* mozog egy kis m tömegű *A autómodell. Mekkora legyen a laphoz viszonyított sebessége* az idő függvényében, *hogy a lap* ω *szögsebessége állandó legyen?* Legyen a $t=0$ időpontban az autómodell a B pontban (35. ábra); jelöljük a laphoz viszonyított sebességét $v=v(t)$-vel.

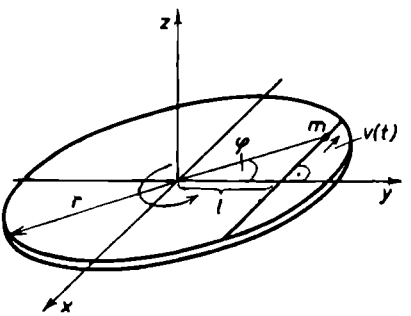
A körlapból és az autómodellből álló *rendszer perdületének* (impulzusnyomatékának) *állandónak* kell maradnia a mozgás folyamán:

$$I\omega+m\frac{l^2}{\cos^2\varphi}\omega+mlv=\text{const.}$$

(Itt az 1. tag a körlap ω szögsebességű forgásával, a 2. tag a modell hasonló forgásával, a 3. pedig a modell v viszonylagos sebességű mozgásával kapcsolatos.)

A $t=0$ időpontban $\varphi=0$ és $v=v_0$ lévén, a const. értéke:

$$I\omega+m\frac{l^2}{\cos^2\varphi}\omega+mlv=I\omega+ml^2\omega+mlv_0.$$



35. ábra

Ebből egyszerűsítéssel nyerjük:

$$l\omega\left(\frac{1}{\cos^2\varphi}-1\right)=v_0-v.$$

Tekintettel a

$$v=\frac{d}{dt}(l\operatorname{tg}\varphi)=\frac{l}{\cos^2\varphi}\frac{d\varphi}{dt}$$

összefüggésre, előbbi egyenletünk így írható:

$$\omega\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}=\dot{\varphi}_0-\frac{\dot{\varphi}}{\cos^2\varphi}=\frac{\dot{\varphi}_0\cos^2\varphi-\dot{\varphi}}{\cos^2\varphi},$$

ahol $\dot{\varphi}_0=\frac{v_0}{l}$, majd pedig így:

$$\frac{d\varphi}{\dot{\varphi}_0\cos^2\varphi-\omega\sin^2\varphi}=dt.$$

* L.: Elméleti fizikai feladatok.

Előttünk áll a mozgás már szeparált *differenciálegyenlete.* Ezt $\varphi(0)=0$ *kezdeti feltétel* mellett, $u=\operatorname{tg}\varphi$ helyettesítéssel integráljuk:

$$\int_0^a dt=\int_0^a \frac{1}{\dot\varphi_0-\omega\operatorname{tg}^2\varphi}\,\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}=\int_0^a \frac{du}{\dot\varphi_0-\omega u^2},$$

$$t=\frac{1}{\sqrt{\dot\varphi_0\omega}}\operatorname{arth}\sqrt{\frac{\omega}{\dot\varphi_0}}\,u=\frac{1}{\sqrt{\dot\varphi_0\omega}}\operatorname{arth}\sqrt{\frac{\omega}{\dot\varphi_0}}\operatorname{tg}\varphi,$$

ahonnan:

$$\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{\frac{\dot\varphi_0}{\omega}}\operatorname{th}\sqrt{\dot\varphi_0\omega}t.$$

A *modell kérdezett viszonylagos sebessége* tehát:

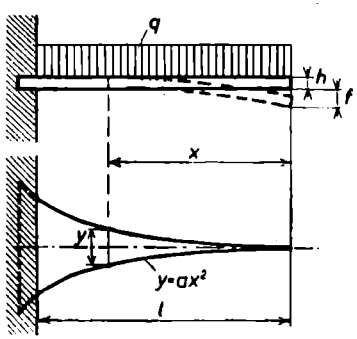
$$v=v(t)=l\frac{d}{dt}(\operatorname{tg}\varphi)=\frac{v_0}{\operatorname{ch}^2\sqrt{\frac{\omega v_0}{l}}\,t}.$$

3. Egy szélesebbik végénél befogott, *állandó h magasságú* tartó *szélessége* az $y=ax^2$ egyenlet szerint változik. A tartó *egyenletesen eloszló q terhelésű.* Meghatározandó *a tartó végének lehajlása* a *Mohr*-féle integrál segítségével.*

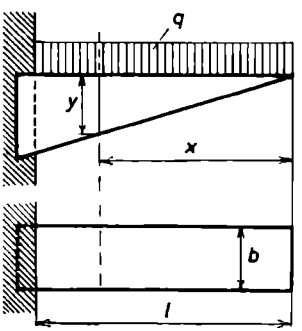
A tartó végére egységnyi lefelé ható erőt helyezve és figyelembe véve, hogy $I=\frac{yh^3}{12}=\frac{ax^2h^3}{12}$, írható:

$$f=\frac{1}{E}\int_0^l\frac{\left(-\frac{qx^2}{2}\right)(-1x)\,dx}{\frac{ax^2h^3}{12}}=\frac{6q}{ah^3E}\int_0^l x\,dx=\frac{3ql^2}{ah^3E}.$$

4. *Egyenszilárdságú, állandó h magasságú tartó* (36. ábra) a hossza mentén *egyenletesen eloszló q terhelésű.* Meghatározandó a tartó szabad végétől számított x távolságban a *keresztmetszet y szélessége,* ha adva van $[\sigma_t]$.



36. ábra



37. ábra

* L. Иванов i. m.

5. *Egyenszilárdságú, állandó b szélességű tartó* (37. ábra) *egyenletesen eloszló q terhelésű.* Meghatározandó a *tartó y magassága* a tartó végétől számított x távolságban, ha $[\sigma_t]$ adva van.

***6.** Egy függőleges egyenes *csonkakúp alakú fenyőfa* magassága $h = 20{,}0$ m, alap- és fedőlapjának átmérője $d_1 = 30$ cm és $d_2 = 12$ cm. A fát $V = 5{,}0$ m/s sebességű *szél meghajlítja.*

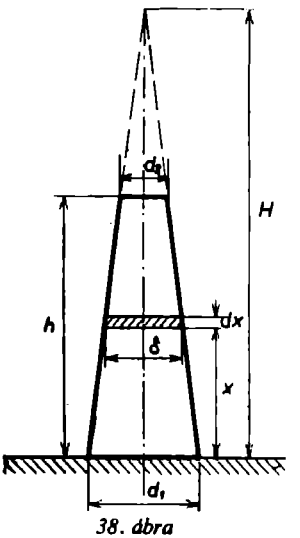
Meghatározandó a fatörzs csúcsának legnagyobb kitérése — a szél c turbulenciatényezőjét a fatörzs mentén állandónak véve — ha a levegő sűrűsége $\varrho = 0{,}12$ kgs^2/m^4, viszkozitása $\nu = 0{,}12$ cm^2/s, a fa rugalmassági modulusa $E = 150\,000$ kg/cm^2 (38. ábra).**

A fatörzs felső, illetve alsó szelvényére vonatkozó *Reynolds*-szám:

$$R_1 = \frac{d_1 \varrho V}{\nu} = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}12 \cdot 5}{0{,}12 \cdot 10^{-4}} = 15\,000,$$

$$R_2 = \frac{d_2 \varrho V}{\nu} = \frac{0{,}12 \cdot 0{,}12 \cdot 5}{0{,}12 \cdot 10^{-4}} = 6000;$$

ezeknek megfelelően a turbulenciatényező tapasztalati átlagértéke: $c \approx 1{,}2$, vagyis a turbulencia miatt a szél nyomóereje a fatörzsre átlagosan 1,2-szeresére növekszik.



38. ábra

Az ábrából látható, hogy:

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{H}{H-h},$$

ahonnan a teljes kúp magassága:

$$H = h \frac{d_1}{d_1 - d_2}.$$

A fa átmérője valamely x magasságban:

$$\delta = \frac{H-x}{H} d_1 = \left(1 - \frac{x}{H}\right) d_1,$$

vagy H előbbi kifejezésével:

$$\delta = d_1 \left(1 - \frac{x}{h} \frac{d_1 - d_2}{d_1}\right) = d_1 \left[1 - \frac{x}{h}\left(1 - \frac{d_2}{d_1}\right)\right].$$

A *szél nyomóereje* egy dx szélességű fatörzselemre:

$$dT = \frac{1}{2} c \varrho V^2 \cdot \delta \, dx = \frac{1}{2} c \varrho V^2 d_1 \left[1 - \frac{x}{h}\left(1 - \frac{d_2}{d_1}\right)\right] dx.$$

A $\frac{dT}{dx}$ fajlagos terhelés lineáris függvénye az x-nek. Határozzuk meg a fatörzs gyökerénél fellépő *reakcióerőt:*

$$R = \int_0^h dT = \frac{1}{2} c \varrho V^2 d_1 \int_0^h \left[1 - \frac{x}{h}\left(1 - \frac{d_2}{d_1}\right)\right] dx = \frac{1}{4} \varrho c V^2 d_1 h \left(1 + \frac{d_2}{d_1}\right).$$

** L. Яблонский i. m.

Az x abszcisszájú keresztmetszetet terhelő *nyomaték:*

$$M_x = Rx - \int_0^x x\,dT = \frac{1}{4}\varrho c V^2 d_1 h x\left(1+\frac{d_2}{d_1}\right) - \frac{1}{2}\varrho c V^2 d_1 \int_0^x x\left[1-\frac{x}{h}\left(1-\frac{d_2}{d_1}\right)\right]dx =$$

$$= \frac{1}{12}\varrho c V^2 d_1 h^2\left[3\left(1+\frac{d_2}{d_1}\right)\frac{x}{h} - 3\frac{x^2}{h^2} + 2\frac{x^3}{h^3}\left(1-\frac{d_2}{d_1}\right)\right].$$

Az x abszcisszájú keresztmetszet *inercianyomatéka:*

$$I_x = \frac{\pi}{64}\delta^4 = \frac{\pi}{64}d_1^4\left[1-\frac{x}{h}\left(1-\frac{d_2}{d_1}\right)\right]^4.$$

Vezessük be a következő jelölést, illetve helyettesítést:

$$I_1 = \frac{\pi d_1^4}{64}, \qquad \xi = 1-\frac{x}{h}\left(1-\frac{d_2}{d_1}\right).$$

Ezekkel:

$$I_x = I_1\xi^4, \quad \text{továbbá} \quad \frac{x}{h} = \frac{1-\xi}{1-\frac{d_2}{d_1}}, \qquad dx = -\frac{h\,d\xi}{1-\frac{d_2}{d_1}}.$$

A *hajlított rúd* ismert $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M_x}{EI_x}$ alakú közelítő *differenciálegyenlete* e helyettesítés után így írható:

$$\frac{d^2y}{d\xi^2} = \frac{M_\xi}{EI_\xi} = \frac{c\varrho V^2 d_1 h^4}{12EI_1}\left[\frac{2}{\xi^4} - \frac{3\left(1-\frac{d_2^2}{d_1^2}\right)}{\xi^3} + \frac{3}{\xi^2} - \frac{2}{\xi}\right].$$

A $\frac{c\varrho V^2 d_1 h^4}{12EI_1}$ állandót A-val jelölve és figyelembe véve, hogy $x=0$ esetén $\xi=1$ és $\frac{dy}{d\xi}=0$, nyerjük:

$$\int_0^{\frac{dy}{d\xi}} d\left(\frac{dy}{d\xi}\right) = A\int_1^\xi \left[\frac{2}{\xi^4} - \frac{3\left(1-\frac{d_2^2}{d_1^2}\right)}{\xi^3} + \frac{3}{\xi^2} - \frac{2}{\xi}\right]d\xi,$$

azaz

$$\frac{dy}{d\xi} = A\left[-\frac{2}{3\xi^3} + \frac{3\left(1-\frac{d_2^2}{d_1^2}\right)}{2\xi^2} - \frac{3}{\xi} - 2\ln\xi + \frac{11}{3} - \frac{3}{2}\left(1-\frac{d_2^2}{d_1^2}\right)\right].$$

Továbbá figyelembe véve, hogy $x=0$-nál $\xi=1$ és $y=0$, írható:

$$\int_0^y dy = A\int_1^{\xi}\left[-\frac{2}{3\xi^3}+\frac{3\left(1-\frac{d_2^2}{d_1^2}\right)}{2\xi^2}-\frac{3}{\xi}-2\ln\xi+\frac{11}{3}-\frac{3}{2}\left(1-\frac{d_2^2}{d_1^2}\right)\right]d\xi,$$

azaz:

$$y=A\left[\frac{1}{3\xi^2}-\frac{3}{2}\left(1-\frac{d_2^2}{d_1^2}\right)\left(\frac{1}{\xi}-\xi\right)-3\ln\xi-2\xi\ln\xi-\frac{5}{3}\xi+\frac{4}{3}\right].$$

Ezzel előállítottuk a differenciálegyenletünknek a *két kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldását.*

Fent $x=h$-nál $\xi=\frac{d_2}{d_1}=\frac{16}{40}=0{,}4$. *A fa csúcsának kitérése* tehát:

$$f=y(h)=A\left[\frac{1}{3\xi^2}-\frac{3}{2}(1-\xi^2)\left(\frac{1}{\xi}-\xi\right)-3\ln\xi-2\xi\ln\xi-\frac{5}{3}\xi+\frac{4}{3}\right].$$

Az adott számértékek mellett:

$$A=\frac{c\varrho V^2 d_1 h^4}{12EI_1}=\frac{1{,}2\cdot 0{,}12\cdot 25\cdot 0{,}3\cdot 16\,000}{12\cdot 150\,000\cdot 10^4\cdot\frac{\pi}{64}\cdot 0{,}3^4}\approx 2{,}0\cdot 10^{-2},$$

a szögletes zárójelbeli kifejezés értéke pedig:

$$\frac{1}{3\cdot 0{,}16}-\frac{3}{2}0{,}84(2{,}5-0{,}4)+2{,}75+0{,}732-0{,}667+1{,}33=$$
$$=0{,}208-2{,}65+2{,}75+0{,}732-0{,}667+1{,}33=1{,}706.$$

A fa csúcsának kitérése ily módon, *számadataink mellett:*

$$f=1{,}706\cdot 2\cdot 10^{-2}=0{,}034\text{ m}\approx 3{,}5\text{ cm}.$$

* * *

Rögzített tengely körül forgó test kinetikus energiája: $E=\frac{1}{2}I\omega^2$, *ahol* ω *a forgás szögsebessége és* I *a testnek a forgástengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka. Ezek ismeretében oldjuk meg az alábbi feladatokat.* ($[I]=\text{gcm}^2$, $[\omega]=\text{s}^{-1}$, $[E]=\text{gcm}^2\text{s}^{-2}$).*

7. Határozzuk meg egy átmérő körül ω szögsebességgel forgó, δ sűrűségű anyagból készült gömb kinetikai energiáját.

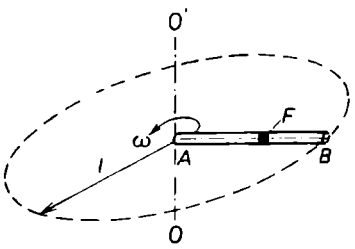
Az adott formula szerint:

$$E=\frac{1}{2}\omega^2 I=\frac{1}{2}\omega^2\int_{-r}^{+r}\delta y^2\pi\frac{y^2}{2}\,dx=\frac{1}{2}\pi\omega^2\delta\int_0^r(r^2-x^2)^2\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\pi\omega^2\delta\left[r^4x-\frac{2r^2x^3}{3}+\frac{x^5}{5}\right]_0^r=\frac{1}{2}\omega^2\pi\delta\,\frac{15-10+3}{15}=\frac{4\omega^2}{15}\pi\delta.$$

* Itt I és E *fizikai* dimenzióját használjuk.

8. Az *AB rúd* (39. ábra) a vízszintes síkban $\omega = 10\pi s^{-1}$ szögsebességgel forog az OO' tengely körül. A rúd keresztmetszete $F = 4$ cm^2, hossza $l = 20$ cm, anyagának sűrűsége $\delta = 7{,}8$ g/cm^3. Határozzuk meg a rúd E kinetikus energiáját.



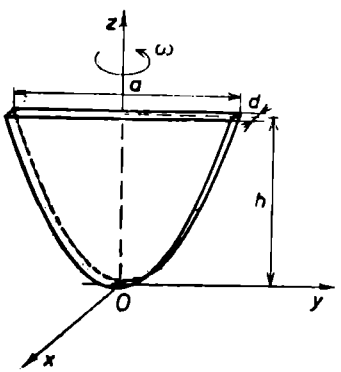
39. ábra

9. Egy $a = 50$ cm, $b = 40$ cm méretű *téglalap alakú lemez* állandó $\omega = 3\pi\ s^{-1}$ szögsebességgel forog az a oldal körül; határozzuk meg E kinetikus energiáját. A lemez vastagsága $d = 0{,}3$ cm, anyagának sűrűsége $\delta = 8$ g/cm^3.

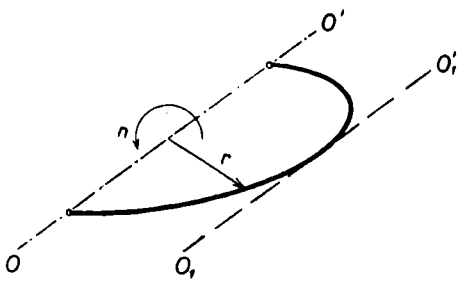
10. Egy *háromszög alakú* lemez, melynek alapja $a = 40$ cm és magassága $h = 30$ cm, az alapja körül forog, állandó $\omega = 5\pi\ s^{-1}$ szögsebességgel. Határozzuk meg E kinetikus energiáját, ha a lemez vastagsága $d = 0{,}2$ cm és anyagának sűrűsége $\delta = 2{,}2$ g/cm^3.

11. Valamely *parabolaszelet alakú lemez* (40. ábra) a parabola tengelye körül állandó $\omega = 4\pi\ s^{-1}$ szögsebességgel forog. A szelet alapja $a = 20$ cm, magassága $h = 30$ cm, a lemez vastagsága $d = 0{,}3$ cm, az anyag sűrűsége $\delta = 7{,}8$ g/cm^3. Határozzuk meg a lemez kinetikus energiáját.

12. Egy r alapkörsugarú, h magasságú *körhenger* állandó ω szögsebességgel forog saját tengelye körül. Anyagának sűrűsége δ. Határozzuk meg a henger kinetikus energiáját.



40. ábra



41. ábra

13. Egy r sugarú, M tömegű *félgyűrű*, a végein keresztülmenő OO' tengely körül forog n/perc fordulatszámmal. Határozzuk meg a gyűrű kinetikus energiáját. Határozzuk meg a kinetikus energiát azon esetben is, ha a forgástengely a félgyűrűt felezési pontjában érinti (41. ábra).

*
* *

14. Meghatározandó a 42. ábrán bemutatott metszet x tengelyre vonatkozó inercianyomatéka és keresztmetszeti tényezője (a méretek cm-ekben).

15. Egy *négyzeten* belül (43. ábra) négyzetes kivágás van. Miként választandó n, hogy a vonalkázott síkrésznek a feltüntetett x és y tengelyre vonatkozó I_x és I_y inercianyomatékának viszonya 6 legyen?

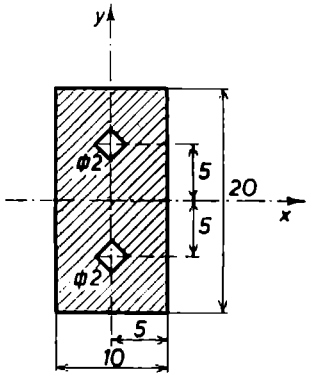
16. Meghatározandó az adott keresztmetszetre (44. ábra):

a) a ξ tengelyre vonatkozó inercianyomaték,

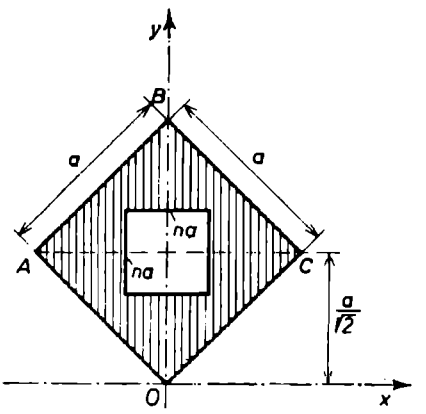
b) a keresztmetszet súlypontjának helye,

c) a súlyponton átmenő főtengelyekre vonatkozó I_x és I_y inercianyomaték.

A keresztmetszet méretei cm-ben vannak megadva.



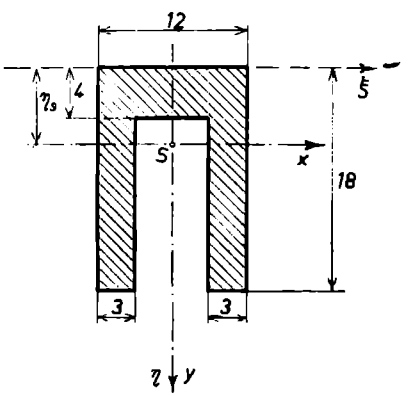
42. ábra



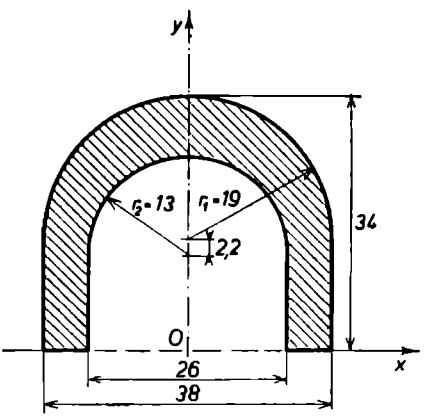
43. ábra

17. Meghatározandó a 45. ábrán bemutatott metszet y tengelyére vonatkozó inercianyomaték (a méretek mm-ben vannak megadva).

18. Meghatározandó a 46. ábrán látható metszetnek a súlypontján átmenő (feltüntetett) x és y tengelyekre vonatkozó inercianyomatéka (a méretek mm-ben vannak megadva).



44. ábra



45. ábra

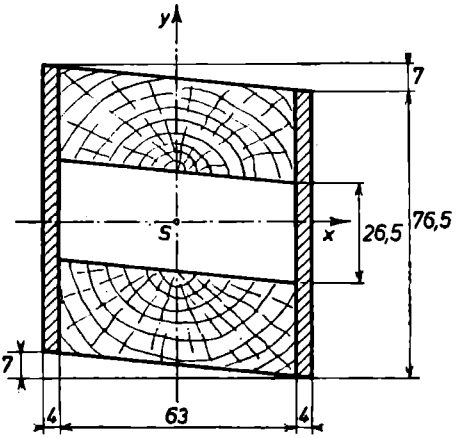
19. Megállapítandó az *ABC háromszög*nek a feltüntetett y tengelyre vonatkozó inercianyomatéka, ha ismert a területe, valamint a b és c mérete (47. ábra).

Hosszabbítsuk meg a BC oldalt az x tengellyel való metszéspontjáig, és tekintsük úgy az ABC $\triangle$ területét, mint az ABD $\triangle$ és az ACD $\triangle$ területének különbségét.

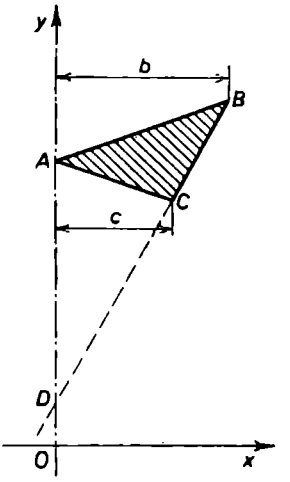
***20.** A 48. ábrán bemutatott két egybevágó metszet egymástól d távolságra van elhelyezve. Mekkora ez a távolság, ha az egész keresztmetszetre vonatkozó I_x és I_y inercianyomaték egyenlő egymással?

A d a következő egyenletből határozható meg:

$$3d^2[BH-bh]+6d[B^2H-2Bbh+b^2h]=BH^3-bh^3-4B^3[H-h]-4h[B-b]^3.$$



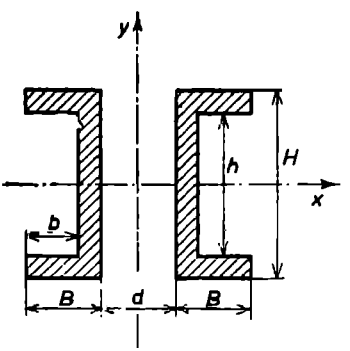
46. ábra



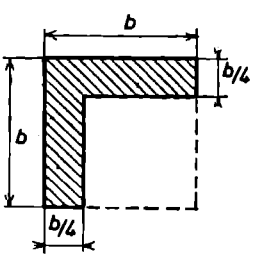
47. ábra

***21.** Meghatározandó a 49. ábrán megadott méretekkel rendelkező *sarokvas*-keresztmetszetnek főtehetetlenségi tengelyeire* vonatkozó inercianyomatéka.

Tekintsük úgy a sarokvas-keresztmetszetet, mint két négyzet különbségét, akkor könnyen megállapítható, hogy a súlypont a szög csúcsától a szögfelező mentén $x_s=\frac{37b}{28\sqrt{2}}$ távolságban van. A szögfelező egyenes lesz az egyik főtengely, a másik pedig az erre merőleges és a súlyponton átmenő egyenes.



48. ábra



49. ábra

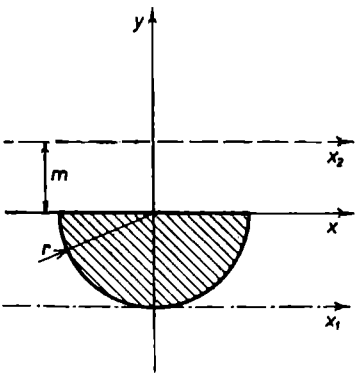
22. Megállapítandó a *félkör*területnek az átmérőjével párhuzamos x_1 és x_2 tengelyre vonatkozó inercianyomatéka (50. ábra).

23. Meghatározandó az 51. ábrán bemutatott metszet (a méretek mm-ben értendők) súlypontjának helyzete, valamint az x, y és ξ tengelyekre vonatkozó inercianyomatéka.

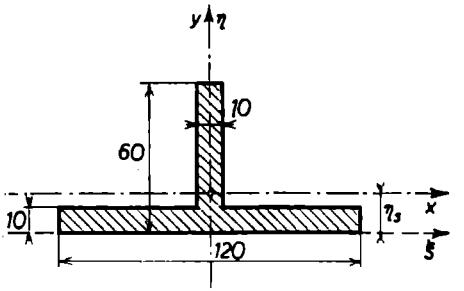
* L. bővebben az A. X. kötetben.

24. Meghatározandó az 52. ábrán látható, *két kör*ből álló metszet inercianyomatéka az x tengelyre vonatkozólag.

25. Meghatározandó az adott idom (53. ábra) inercianyomatéka a vízszintes átmérőjével egybeeső x tengelyre vonatkozólag.



50. ábra



51. ábra

26. Meghatározandó a *negyedkörszelvény*nek (54. ábra) a súlypontján átmenő x tengelyre vonatkozó inercianyomatéka.

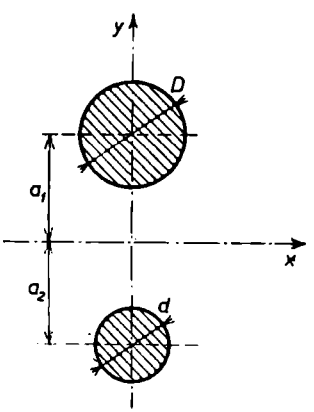
27. Meghatározandó az 55. ábrán látható keresztmetszet súlypontjának helyzete és a főtengelyekre vonatkozó inercianyomatéka.

28. Meghatározandó az 56. ábrán látható síkidomnak az x tengelyre vonatkozó inercianyomatéka.

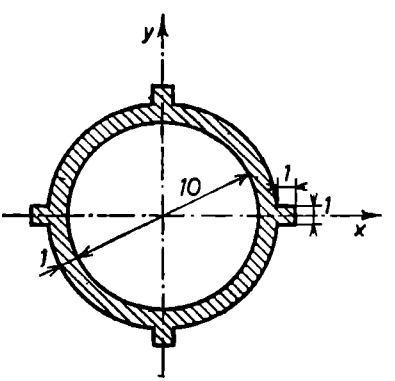
29. Meghatározandó az 57. ábrán látható metszetnek főtengelyeire vonatkozó I_x és I_y inercianyomatéka.

30. Meghatározandó az 58. ábrán bemutatott metszetnek főtengelyeire vonatkozó I_x és I_y inercianyomatéka, ha $R = 20$ cm, $r = 10$ cm és $e = 5$ cm.

***31.** Meghatározandó egy *körszelet* inercianyomatéka (59. ábra), a húrral egybeeső x tengelyre vonatkozólag.



52. ábra



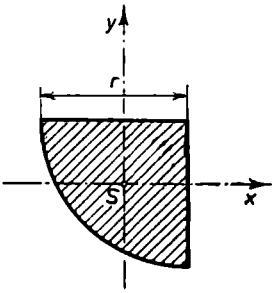
53. ábra

Messünk ki a szeletből egy területelemet, amelynek vastagsága dy, szélessége $2x$ és y távolságra van a tengelytől. Ezzel:

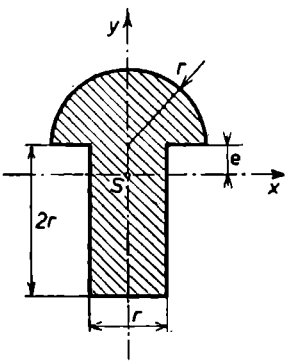
$$I_x = 2\int_{r\cos\alpha}^{r} (y - r\cos\alpha)^2 x\, dy = 2\int_{r\cos\alpha}^{r} (y - r\cos\alpha)^2 \sqrt{r^2 - y^2}\, dy,$$

amely az integráció elvégzése után a következő eredményre vezet:

$$I_x = r^4\left\{\alpha\left(\cos^2\alpha + \frac{1}{4}\right) - \sin\alpha\cos\alpha\left(\frac{5}{4} - \frac{1}{6}\sin^2\alpha\right)\right\}.$$



54. ábra



55. ábra

32. Egy 24×24 cm-es *négyzet* főtengelyeire vonatkozó $I_{xn} = I_{yn}$ inercianyomatéka 27 648 cm^4. Hányszorta kisebb egy 12×8 cm-es téglalap főtengelyeire vonatkozó I_x és I_y inercianyomatéka?

***33.** Meghatározandó a 60. ábrán látható idomnak az y tengelyre vonatkozó inercianyomatéka.

Az idom egyes részeit a pontozva megrajzolt módon átalakítva, egy derékszögű idom inercianyomatékának meghatározására jutunk.

34. Meghatározandó a 61. ábrán megadott síkidomnak az x és y tengelyre vonatkozó inercianyomatéka.

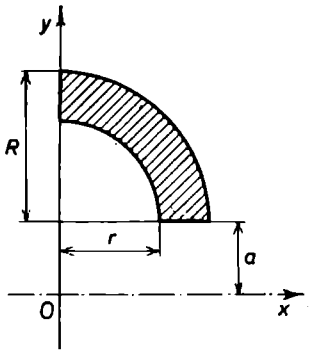
***35.** Meghatározandó a 62. ábrán látható üreges *bordástengely-keresztmetszet*nek az x főtengelyre vonatkozó inercianyomatéka.

A bordák inercianyomatékai igen nagy pontossággal úgy számíthatók, mint derékszögű idomoké, saját tengelyükhöz viszonyítva. Ha e nyomatékok a bordaterületeknek és az x tengelytől való távolságuk négyzetének szorzataihoz képest kicsik, akkor az előbbiek elhanyagolhatók az utóbbiakhoz képest; következésképpen írhatjuk:

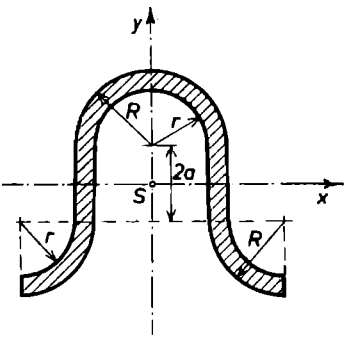
$$I_x \approx I + 2Fy_1^2 + 4Fy_2^2 = 26{,}6 \text{ cm}^4,$$

ahol I a borda nélküli üreges tengely metszetének másodrendű nyomatéka, míg F a bordametszetek területe.

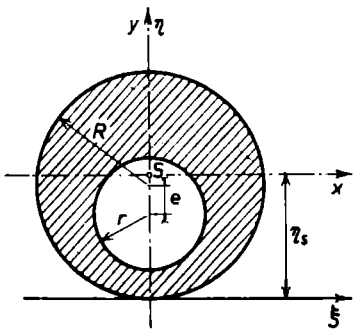
36. Meghatározandó a 63. ábrán látható metszetnek az x tengelyre vonatkozó inercianyomatéka. Az x tengely a metszet magasságát felezi. (A méretek mm-ben értendők.)



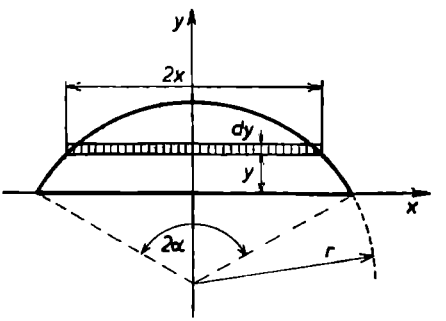
56. ábra



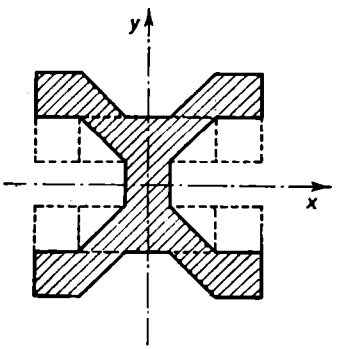
57. ábra



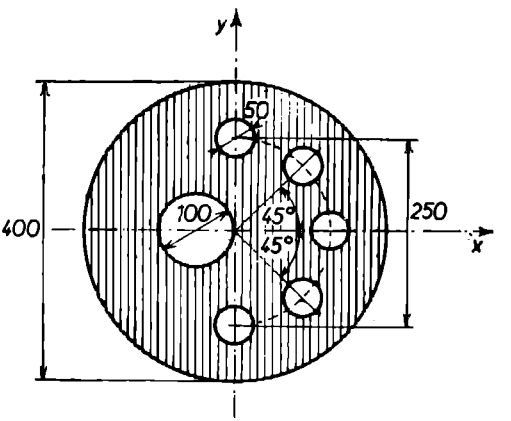
58. ábra



59. ábra



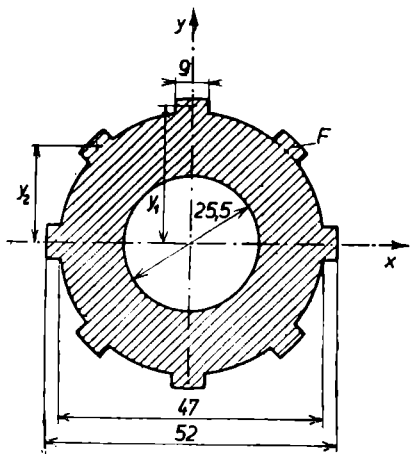
60. ábra



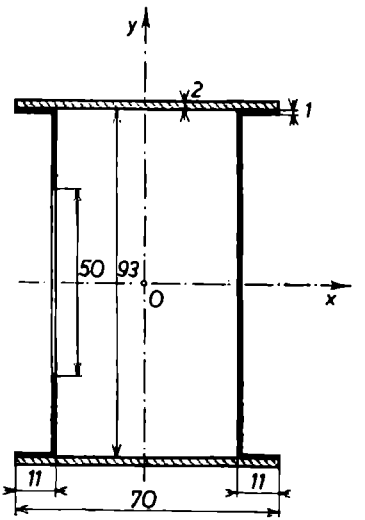
61. ábra

37. Meghatározandó a 64. ábrán bemutatott metszetnek vízszintes tengelyére vonatkozó inercianyomatéka. (A méretek mm-ben vannak megadva.)

38. Megállapítandók az adott keresztmetszetekre az I_x és I_y inercianyomatékok (65. ábra). (A megoldásnál használhatók a bonyolult metszetekre vonatkozó inercianyomaték-táblázatok.)



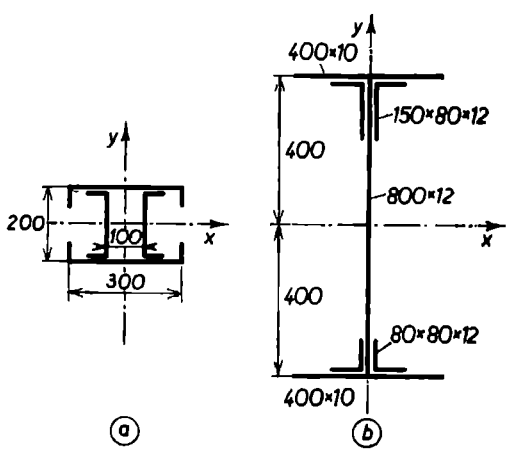
62. ábra



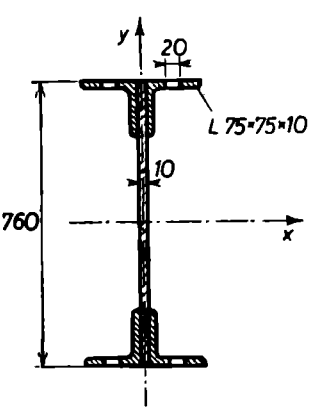
63. ábra

39. Meghatározandó a 66. ábrán látható oszlopmetszet I_x és I_y inercianyomatéka. Az oszlop két 18-as és egy 30-as I-vasból áll.

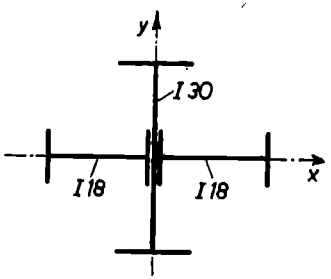
40. Meghatározandó a 67. ábrán látható oszlopszelvény I_x és I_y inercianyomatéka. Az oszlop két $100 \times 65 \times 10$ mm-es L-vasból áll. (Az y tengely a szögvasak súlypontján megy át.)



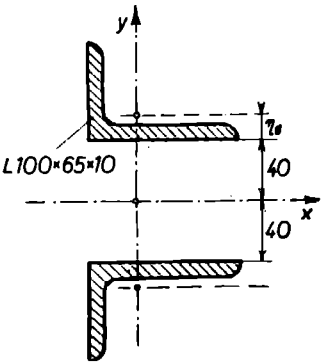
64. ábra



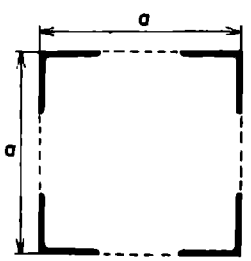
65. ábra

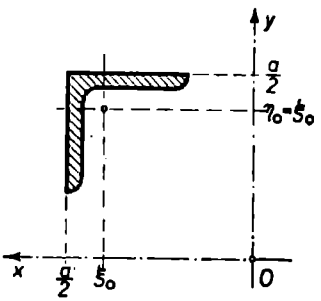


66. ábra

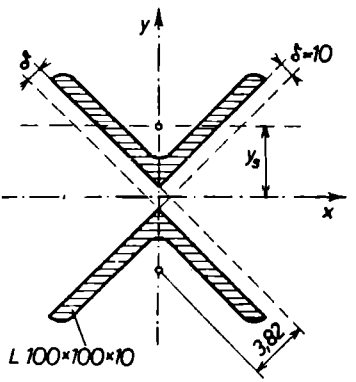


67. ábra

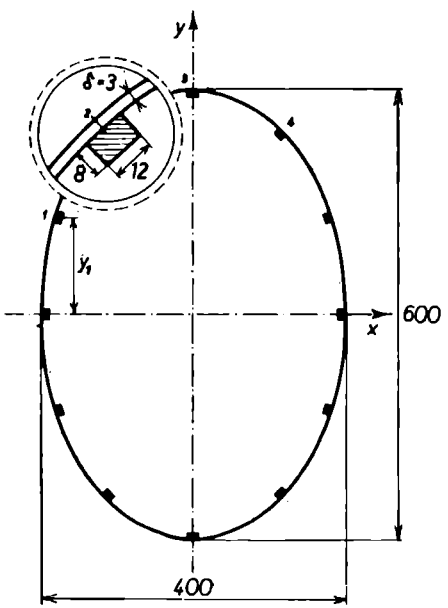




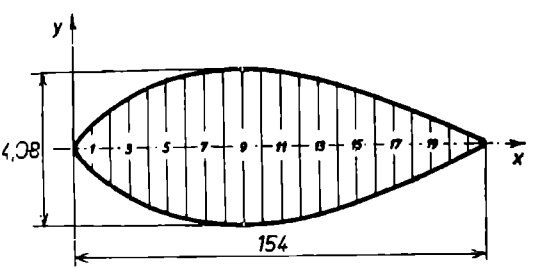
68. ábra



69. ábra



70. ábra



71. ábra

41. Meghatározandó a 68. ábrán látható oszlopszelvénynek két főtengelyére vonatkozó inercianyomatéka. Az oszlop négy egyenlő szárú $80 \times 80 \times 10$ mm-es szögvasból áll; $a = 270$ mm.

42. Meghatározandó a 69. ábrán látható oszlop keresztmetszetének két főtengelyére vonatkozó inercianyomatéka. Az oszlop két egyenlő szárú $100 \times 100 \times 10$ mm méretű szögvasból áll; $\delta = 10$.

43. Meghatározandó a 70. ábrán bemutatott, $\delta = 3$ mm vastagságú furnérlemezből készített oszlop metszetének az x tengelyre vonatkozó inercianyomatéka. A metszet ellipszis alakú, tengelyméretei 400 és 600 mm és 12 darab 12×8 mm keresztmetszetű rúd van benne.

A rudak keresztmetszetének súlyponti tengelyükre vonatkozó inercianyomatéka elhanyagolható az Fy^2 szorzatokhoz képest. Ez lehetővé teszi az 1, 2 és 3 rudak inercianyomatékának csupán e szorzatok segítségével történő kiszámítását. A szükséges értékek a rajzból vehetők ki, az 1 és 2 rudak helyzetének kiszámításával, figyelembe véve, hogy a rudak a kerületen egymástól egyenlő távolságra helyezkednek el.

44. Meghatározandó a 71. ábrán feltüntetett metszetnek az x-tengelyre vonatkozó inercianyomatéka, a *Simpson*-szabály segítségével, ha a metszet 1, 2, 3, ..., 21 jelű ordinátáinak hossza mm-ben rendre a következő:

0,8; 2,03; 2,67; 3,13; 3,52; 3,79; 3,98; 4,07; 4,08; 4,03; 3,96; 3,78; 3,61; 3,39; 3,08; 2,75; 2,37; 1,93; 1,45; 0,86; 0,20.

f) Erő statikai (forgató-) nyomatéka*

α) Erő statikai nyomatéka. Nyomatéki tétel

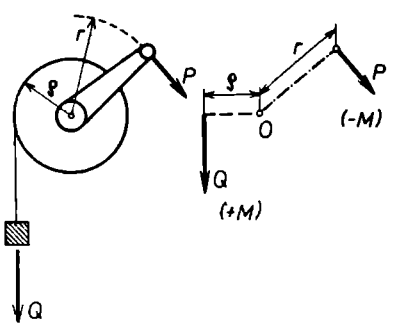
α_1) Az erő statikai nyomatékának fogalma. — A technikában az *erő* egyik legfontosabb hatása a *forgatás*. Az erő e forgatóhatásának jellemzésére vezetjük be *az erő statikai (forgató-) nyomatékának* fogalmát; mértékéül az erőnek és karjának (a forgástengelytől mért merőleges távolságának) szorzatát választjuk (72. ábra):

$$M = Pr.$$

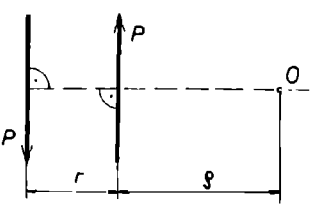
Az óramutató járásával ellenkező értelemben forgató nyomatékot tekintjük pozitívnak.

Ugyancsak forgató hatású a két egyenlő nagyságú, párhuzamos és ellenkező értelmű erőből álló különleges síkbeli erőrendszer, az ún. *erőpár*. Nyomatéka, síkjának bármely pontjára vonatkozólag, az (egyik) erő és a kar (a két erő merőleges távolsága) szorzata (73. ábra):

$$M = Pr.$$



72. ábra



73. ábra

Merev test esetén az erő hatásvonalában, az erőpár síkjában és síkjával párhuzamosan eltolható; továbbá síkbeli erő és erőpár helyettesíthető eltolt hatásvonalú erővel és viszont.

α_2) Az erő statikai nyomatékának (vagy röviden: nyomatékának) fogalmára támaszkodik az ún. nyomatéki tétel. Ezt rendszerint előbb egy erő komponenseire, majd közös ponton átmenő síkbeli erőrendszerre szokták kimondani. Általános síkbeli erőrendszerre a tétel így szól:

* *Muttnyánszky*: Statika (Budapest, 1948) c. műve nyomán.

Síkban szétszórt erők eredőjének nyomatéka egyenlő e szétszórt erők nyomatékának összegével — az összes nyomatékokat a sík ugyanazon (különben tetszőleges) pontjára vonatkoztatva:

$$M = Rr = \sum_{i=1}^{n} M_i = \sum_{i=1}^{n} P_i r_i.$$

α_3) A fentebbiekkel összhangban *síkban szétszórt erők* $R(X, Y)$ *eredő erejét* és M *eredő nyomatékát* így számítjuk — az (x, y) derékszögű koordináta-rendszerre és O origójára vonatkoztatva (74. ábra):

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} P_i \cos \alpha_i,$$

$$Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{i=1}^{n} P_i \sin \alpha_i,$$

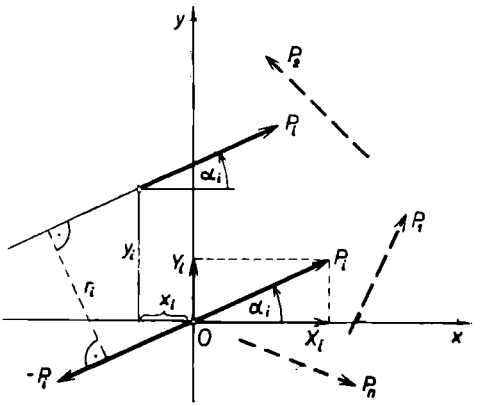
$$M = \sum_{i=1}^{n} M_i = \sum_{i=1}^{n} P_i r_i = \sum_{i=1}^{n} (Y_i x_i - X_i y_i).$$

Egyen súly esetén:

$$X = 0, \qquad Y = 0 \quad \text{és} \quad M = 0,$$

vagy — ha A, B és C három síkbeli, nem egy egyenesre eső pont:

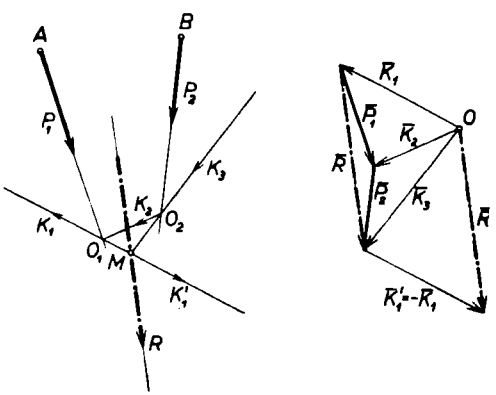
$$M_A = M_B = M_C = 0.$$



74. ábra

β) Nyomatéki ábra

β_1) Vektor- és kötélpoligon felhasználása eredőszerkesztésre. — Közelítőleg vagy pontosan párhuzamos síkbeli szétszórt erők eredőjét (ennek hatásvonalát és vektorát) célszerűen alkalmas irányú $\boldsymbol{K}_1$ és $\boldsymbol{K}_1' = -\boldsymbol{K}_1$ *segéderők* felhasználásával, (metszéspontonként eszközölt) *vektorális összeadások* ($\boldsymbol{K}_2 = \boldsymbol{K}_1 + \boldsymbol{P}_1$, ..., $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{K}_n + \boldsymbol{K}_1' = \boldsymbol{K}_1 + \boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{P}_2 + \ldots + \boldsymbol{P}_n - \boldsymbol{K}_1$) útján állapíthatjuk meg; célszerűen a $\boldsymbol{K}_i = \boldsymbol{K}_1 + \boldsymbol{P}_1 + \ldots + \boldsymbol{P}_i$ részeredő vektorok és végül az eredő vektor meghatározását (egy közös O pontból eszközölt vektoriális összeadások útján) külön segédábrában végezzük (75. ábra).



75. ábra

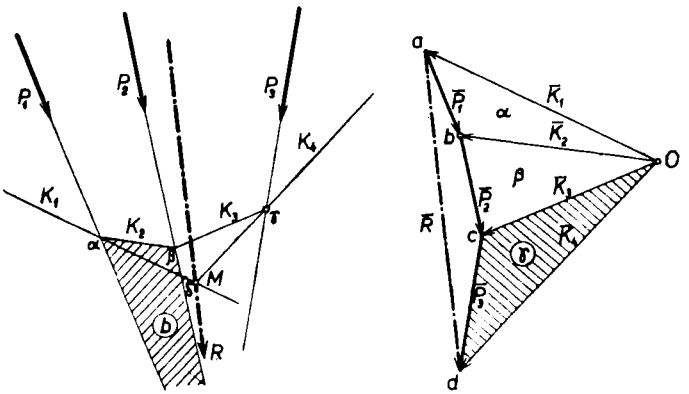
E két összefüggő szerkesztésből alakította ki a grafosztatika az ún. *kötélpoligont* és *vektorpoligont*, — mégpedig a mellőzhető vonalakat (pl. $\boldsymbol{K}_1'$, $\boldsymbol{R}$*) elhagyva, a segéderők és részeredők helyett a vektorpoligonban O pólusból vont sugarakat, a kötélpoligonban kötéloldalakat emlegetve. Az említett két poligon *geometriai rokonsága* (ún. reciprocitás), valamint a szerkesztés részletei tekintetében az irodalomra utalunk* (76. ábra).

Megemlítjük a vektor- és kötélpoligonnal történő eredőszerkesztés két *különleges esetét*: ha az eredő *erőpár*, akkor a vektorpoligon záródik, a kötélpoligon K_n és K_1 kötéloldala

* L. pl. *Muttnyánszky:* Statika 27—30. o.

párhuzamos; ha az erőrendszer *egyensúly*ban van, *a vektor-* és *kötélpoligon egyaránt záródik* (e két poligon záródása az egyensúly feltétele, grafikus eljárás esetén).

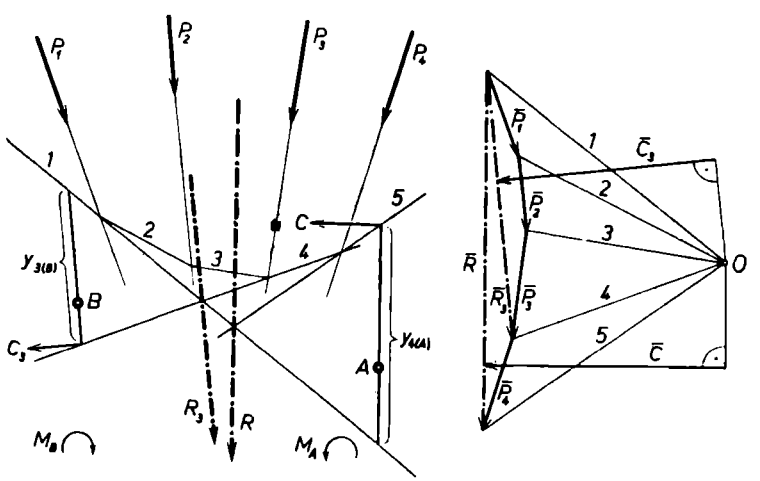
β_2) Vektor- és kötélpoligon felhasználása nyomatékszerkesztésre. — Az összetartozó vektor- és kötélpoligon nyomaték szerkesztésre is felhasználható. Igazolható, hogy *síkban szétszórt erőrendszer* valamely $\boldsymbol{R}_i = \boldsymbol{P}_1 + \ldots + \boldsymbol{P}_i$ (éppen a vektor- és kötélpoligon segítségével megszerkesztett) részeredőjének (vagy eredőjének) *nyomatéka* a sik egy *A* pontjára vonatkozólag *arányos*



76. ábra

az e ponton átmenő, s az illető részeredővel (vagy az eredővel) párhuzamos egyenesből e részeredő hatásvonalát meghatározó két (első és utolsó) kötéloldal meghosszabbítása által *kimetszett y_{iA} darabbal*; a C_i arányossági tényező éppen a vektorpoligonban az illető R_i részeredő (vagy az eredő) vektorának az *O* pólustól mért merőleges távolsága.

$$M_i = r_i R_i = y_i C_i; \qquad [R_i = |\boldsymbol{R}_i|].$$

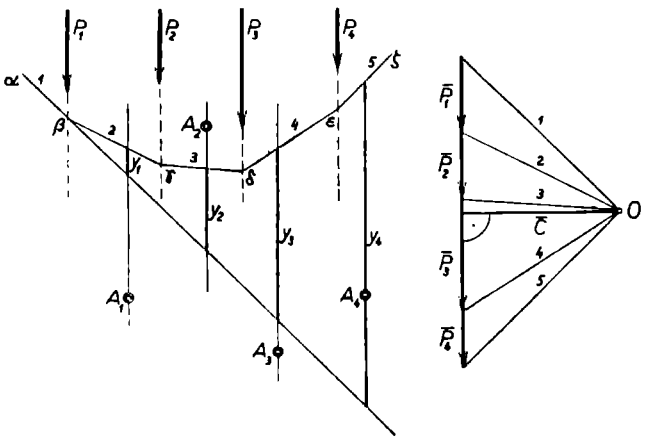


77. ábra

E C_i *különböző irányú* $\boldsymbol{P}$ *erők esetén* részeredőről részeredőre *változó távolság*. E nyomatékok értelmét a 77. ábrán jeleztük.

β_3) A nyomatéki ábra. — Rendkívül nagyjelentőségű a műszaki mechanikai gyakorlatban a *β_1)*-és *β_2)*-ben vázolt *eredő- és nyomatékszerkesztés — párhuzamos erők* (rendszerint függőleges súlyerők és reakcióik) esetén.

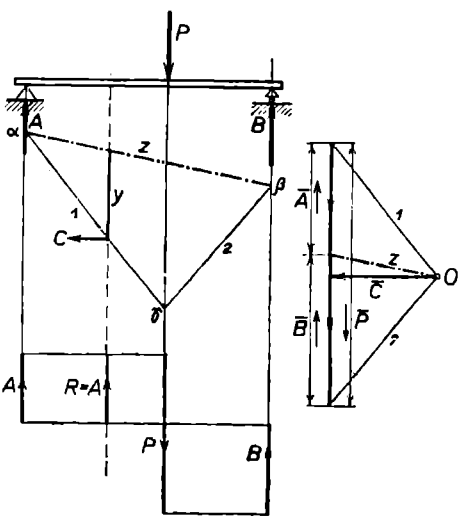
Ez esetben a vektorpoligonban az összegezendő P_i vektorok, valamint az $R_i = P_1 - \ldots + P_i$ részeredők (és az $R = P_1 + \ldots + P_n$ eredő) *egyenes menti vektorok*; távolságuk az O pólustól $C_i = C$ *állandó*, az ún. *pólustávolság*. Ennek megfelelően *minden, az adott erőkkel párhuzamos egyenesnek* az első (meghosszabbított) $\alpha\beta$ kötéloldal és az $\alpha\gamma\delta\varepsilon\zeta$ kötélpoligon közé eső *metszéke a tőle balra eső erők nyomatékával arányos* — a metszék egyenesének bármely pontjára vonatkozólag (78. ábra). Az ilyen ábrát nevezzük *nyomatéki ábrá*nak.



78. ábra

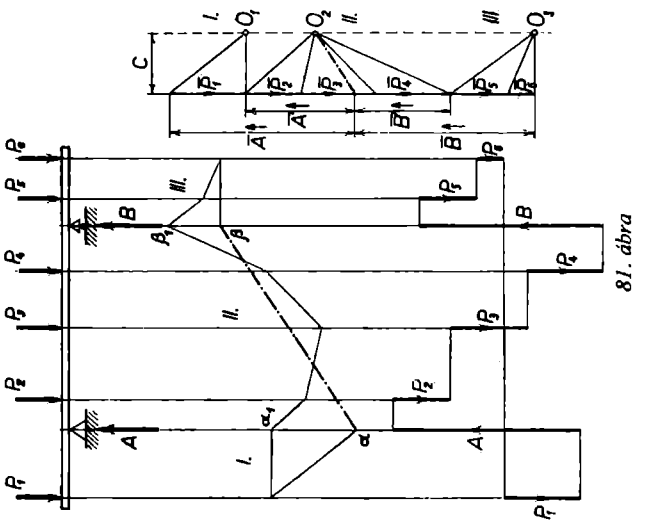
β_4) Világítsuk meg a nyomatéki ábra értelmét egy-két szóval, a gyakorlatban sűrűn szereplő vízszintes helyzetű és függőleges koncentrált erőkkel terhelt (függőleges reakcióerők miatt) egyensúlyban levő kéttámaszú rúddal kapcsolatban.

A tartó valamely K keresztmetszetére a tőle balra levő erők következtében a baloldali rúdrész útján egy R nagyságú és (a K keresztmetszettől mérve) r karú eredő erő hat; ez helyettesíthető $M = Rr$ *nyomatékú erőpár*ral és (önmagával párhuzamosan) a K *keresztmetszetbe tolt* R *erővel*. Az előbbi (a bal oldali rúdrész útján) a K keresztmetszetet elfordítja (a rúd a keresztmetszetek ilyen elfordulása következtében meghajlik); az utóbi erő a bal oldali rúdrészt a K keresztmetszet mentén elcsúsztatni, azaz a rudat e keresztmetszetben elnyírni törekszik. *A bal oldali erők eredőjeként tehát a K keresztmetszetre egy Rr nagyságú ún. hajlító-nyomaték és egy R nagyságú nyíróerő működik.* Ezeket a rúd minden egyes keresztmetszetére nézve a *nyomatéki és nyíróerőábrá*ban szokták szemléltetni. Mint már előbb mondottuk, *egyensúly* esetén a nyomatéki ábra kötélpoligonja és a vektorpoligon záródik. A vektorpoligonban éppen a kötélpoligon záróoldalával párhuzamos sugarat használjuk fel *a reakcióerők* vektorainak kimetszésére (79. ábra). Ezek ismeretében olykor még egy kötélpoligont rajzolnak (a több szempontból célszerűbb) *vízszintes záróoldal*lal; esetleg ezt kisebb pólustávolsággal szerkesztik, hosszabb nyomatéki metszékek nyerése céljából. Konzolos rúd esetén szokásos a *szerkesztést erőcsoportonként* más-más O_i pólussal (de ugyanazon C pólustávolsággal) végezni, hogy megbízhatóbb metszékeket kapjunk. (80. és a 81. ábra.) Megjegyezzük még, hogy a (közepén befogva képzelt) *rúd végét felfelé hajlító nyomatékot tekintjük pozitívnak*.

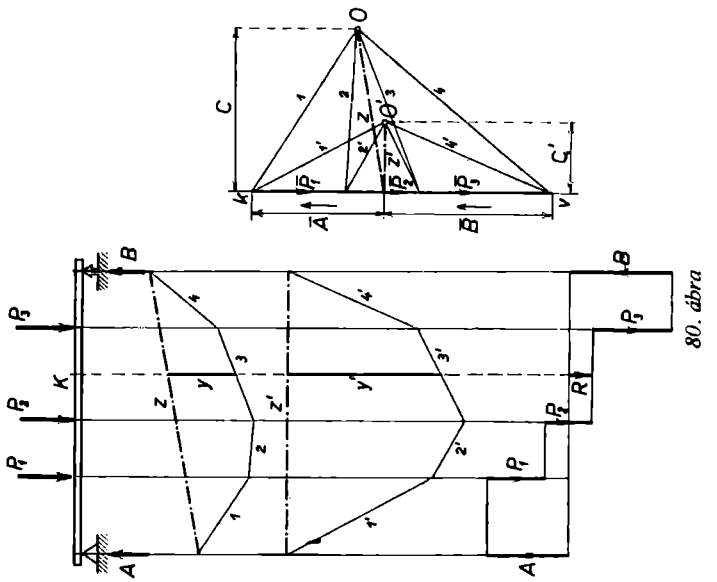


79. ábra

A terhelés, a nyíróerők és a nyomatékok ábráit közös néven a *külső erők ábrái*nak is nevezik.



81. ábra



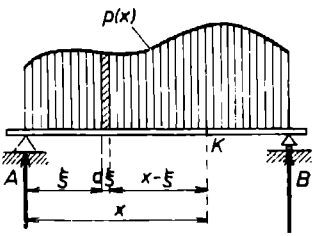
80. ábra

γ) Megoszló terhelésű kéttámaszú rudak

γ_1) A fentiekben koncentrált (a valóságban igen kis felületen megoszló) erőkkel foglalkoztunk. Most vizsgáljuk, hogyan alakulnak *a külső erők ábrái különböző megoszló terhelésű kéttámaszú rudak esetén.* Egyelőre *feltételezzük,* hogy — a rúdvégeken támadó reakcióerőktől eltekintve — a rúdra koncentrált erők nem hatnak. Később ennek alapján fogjuk vizsgálni az általános terhelésű rudat, két koncentrált erő függőlegese között.

A $p(x)$ megoszló terhelésű rúd (82. ábra) *x abszcisszájú K keresztmetszetére vonatkozó hajlítónyomaték* (vagyis a keresztmetszettől balra levő erőknek erre vett nyomatéka):

$$M(x) = Ax - \int_0^x (x-\xi)\, p(\xi)\, d\xi, \qquad M(0) = 0;$$



82. ábra

itt *az erő differenciálját* a $[\xi,\ \xi + d\xi]$ szakaszon úgy nyertük, mintha a $p(\xi)$ megoszló terhelés ott állandó lenne: $dP = p(\xi)\, d\xi$; tehát *a nyomatékdifferenciál:* $dM = -(x-\xi)\, p(\xi)\, d\xi$ (a rúdvéget lefelé hajlítja). *Ugyanezen keresztmetszetbeli nyíróerő* (mely a tőle balra eső erők eredőjével egyenlő nagyságú):

$$R(x) = A - \int_0^x p(\xi)\, d\xi; \qquad R(0) = A$$

(itt a felfelé mutató erőt vettük pozitívnak). Most vizsgáljuk az $M(x)$ kifejezését:

$$M'(x) = \left[Ax - x\int_0^x p(\xi)\, d\xi + \int_0^x \xi p(\xi)\, d\xi \right]' = A - 1 \cdot \int_0^x p(\xi)\, d\xi - x\,p(x) + x\,p(x) =$$

$$= A - \int_0^x p(\xi)\, d\xi = R(x),$$

vagyis (az előrebocsátott feltételek mellett) *az $R(x)$ nyíróerőfüggvény éppen az $M(x)$ hajlítónyomatéki függvény deriváltja.* Végül látható, hogy

$$R'(x) = \left[A - \int_0^x p(\xi)\, d\xi \right]' = -p(x),$$

azaz *a megoszló terhelés $p(x)$ függvénye éppen az $R(x)$ nyíróerőfüggvény deriváltjának* (-1)*-szerese.*

Az $M(x)$, $R(x)$ és $p(x)$ *függvények között tehát a következő fontos összefüggések állnak fenn:*

$$\frac{dM(x)}{dx} = R(x), \qquad \frac{d^2M(x)}{dx^2} = \frac{dR(x)}{dx} = -p(x).$$

Gyakorlatban a megoszló terhelés $p(x)$ függvényéből kell kiindulnunk. Ezt — a fentebbiek szerint — a $[0,\ x]$ szakaszon, az $R(0) = A$ feltétel mellett integrálva, jutunk az $R(x)$

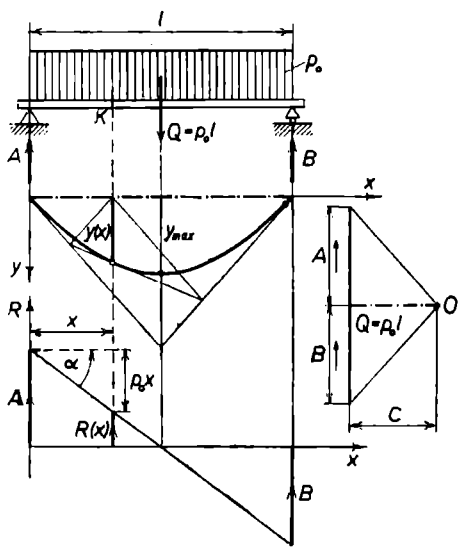
nyíróerőfüggvényhez; míg ez utóbbit ugyanazon szakaszon, az $M(0)=0$ feltétel mellett integrálva, kapjuk az $M(x)$ hajlítónyomaték-függvényt. Eszerint, amikor *a megoszló terhelés ábrája alapján a hajlítónyomatéki ábrát megszerkesztjük, kétszeres integrálással egyenértékű műveletet végzünk.*

Most néhány, a gyakorlatban is szereplő megoszló terhelésre tanulmányozzuk a *külső erők ábráit*, illetve függvényeit, s ennek során állapítsuk meg a kéttámaszú *rúd igénybevétele* szempontjából mértékadó jellemzőket!

Példák és feladatok

1. EGYENLETESEN MEGOSZLÓ TERHELÉSŰ KÉTTÁMASZÚ RÚD

Most a *megoszló terhelés* függvénye $p(x)=p_0=\text{const}$. A *nyíróerő* és a *hajlítónyomaték* függvénye tehát, a fentebbiek szerint (83. ábra):



83. ábra

$$R(x)=R(0)-\int_0^x p_0\,d\xi=A-p_0x$$

és

$$M(x)=\int_0^x R(\xi)\,d\xi=Ax-\frac{1}{2}p_0x^2.$$

Az A *reakcióerő* szimmetriaokok miatt:

$A=\frac{1}{2}p_0l$, s így:

$$R(x)=p_0\left(\frac{l}{2}-x\right),\qquad M(x)=\frac{p_0}{2}(lx-x^2).$$

A nyíróerő görbéje tehát $-p_0$ iránytangensű az x tengelyt az $x_0=\frac{l}{2}$ helyen metsző *egyenes;* a hajlítónyomaték görbéje, az ún. kötélgörbe vízszintes záróoldal esetén $x_1=0$ és $x_2=l$ zérushelyű, $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{l}{2}$ szimmetriatengelyű, $\frac{1}{p_0}$ paraméretű *parabola*, amelyre

$$M_{\max}=M(x_0)=M\left(\frac{l}{2}\right)=\frac{pl^2}{8}.$$

Írjuk fel a kötélgörbe kezdő- és végpontjabeli érintőegyenes egyenletét:

$$y_1=\frac{p_0l}{2}x,\qquad y_2=-\frac{p_0l}{2}(x-l).$$

Az $x_0=\frac{l}{2}$ helyen mindkettőre fennáll:

$$y_1\left(\frac{l}{2}\right)=y_2\left(\frac{l}{2}\right)=\frac{p_0l^2}{4}=2M\left(\frac{l}{2}\right).$$

vagyis a parabolikus *kötélgörbe két végpontjában húzott érintők* $x_0 = \frac{l}{2}$ helyi ordinátája éppen kétszerese a kötélgörbe ottani ordinátájának. Könnyű ellenőrizni, hogy az $y_1(x)$ és $y_2(x)$ érintőegyenesek egyszersmind a megoszló terhelés eredőjére, az $x_0 = \frac{l}{2}$ helyen ható $Q = p_0 l$ koncentrált erőre rajzolt kötélpoligont is alkotják, ui. e Q-ra:

$$M_1(x) = Ax = \frac{p_0 l}{2} x, \quad \text{ahol} \quad 0 \leqq x \leqq x_0 = \frac{l}{2}$$

és

$$M_2(x) = Ax - Q\left(x - \frac{l}{2}\right) = -\frac{p_0 l}{2}(x - l).$$

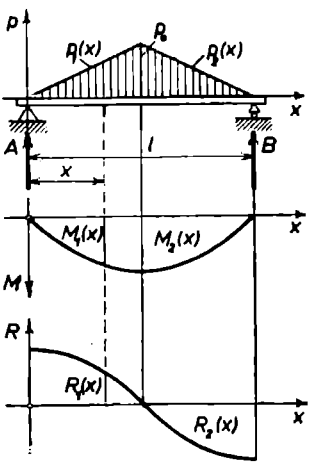
Eredményeink szerint *célszerű* előbb a p_0 egyenletesen megoszló terhelés Q koncentrált eredőjére megrajzolni az ismert módon a kötélpoligont, majd ebbe félakkora középső ordinátával és a végpontokban érintőlegesen belerajzolni a parabolikus kötélpoligont. (Az egyszerűség kedvéért egyelőre feltételeztük, hogy $C = 1$.) Eredményünk összhangban van a másodfokú parabola bizonyos ismert tulajdonságaival; ezek szerint a *parabola* bármely két pontjához tartozó húr felezőpontja és az ottani két érintő metszéspontja által meghatározott távolság felezőpontja pontja a parabolának, s az ottani érintő párhuzamos az említett húrral.*

A fentebbiekben feltételeztük (s ez könnyen el is érhető), hogy a *kötélgörbe* záróoldala vízszintes, és ezt tekintettük x tengelynek; az y tengely pozitív irányát lefelé mutatónak szokás felvenni a nyomatéki ábrában.

Megjegyzendő, hogy az $M = Cy$ összefüggés értelmében (itt C a vektorpoligon pólustávolsága) a kötélgörbe tényleges egyenlete:

$$y(x) = \frac{M(x)}{C} = \frac{p_0}{2C}(lx - x^2).$$

2. Szerkesszük meg a 84. ábrán vázolt megoszló terhelésű kéttámaszú rúd nyíróerő- és hajlítónyomatéki ábráját.



84. ábra

Esetünkben *a megoszló terhelés* tengelyszimmetrikus az $x = \frac{l}{2}$ középvonalra; ezért:

$$p_1(x) = \frac{p_0}{l/2} x = \frac{2p_0}{l} x, \quad \text{ahol} \quad 0 \leqq x \leqq \frac{l}{2},$$

és

$$p_2(x) = p_1(l - x) = \frac{2p_0}{l}(l - x), \quad \text{ahol} \quad \frac{l}{2} \leqq x \leqq l.$$

A *nyíróerő* függvénye:

$$R_1(x) = R_1(0) - \int_0^x p_1(\xi)\, d\xi = \frac{1}{2}\frac{p_0 l}{2} - \frac{2p_0}{l}\int_0^x \xi\, d\xi = \frac{p_0}{l}\left(\frac{l^2}{4} - x^2\right); \qquad R_1\left(\frac{l}{2}\right) = 0,$$

* L. bővebben *Muttnyánszky*: Statika (Budapest, 1948) c. művében.

és

$$R_2(x) = R_1\left(\frac{l}{2}\right) - \int_{l/2}^{x} p_2(\xi)\,d\xi = 0 - \int_{l/2}^{x} p_1(l-\xi)\,d\xi =$$

$$= -\frac{2p_0}{l}\int_{l/2}^{x}(l-\xi)\,d\xi = +\frac{p_0}{l}\left[(l-x)^2 - \frac{l^2}{4}\right] = -R_1(l-x).$$

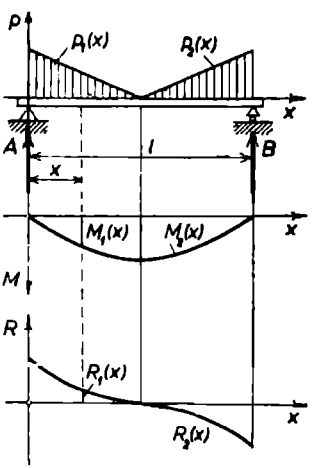
A *hajlítónyomaték* függvénye pedig:

$$M_1(x) = \int_0^x R_1(\xi)\,d\xi = \frac{p_0}{l}\,x\left(\frac{l^2}{4} - \frac{x^2}{3}\right),$$

és

$$M_2(x) = M_1\left(\frac{l}{2}\right) + \int_{l/2}^{x} R_2(\xi)\,d\xi = \frac{p_0 l^2}{12} - \int_{l/2}^{x} R_1(l-\xi)\,d\xi = M_1\left(\frac{l}{2}\right) + \left[M_1(l-\xi)\right]_{l/2}^{x} =$$

$$= M_1(l-x) = \frac{p_0}{l}(l-x)\left[\frac{l^2}{4} - \frac{(l-x)^2}{3}\right].$$



85. ábra

Végeredményben:

$$R_{\max} = R_1(0) = -R_2(l) = \frac{p_0 l}{4}$$

és

$$M_{\max} = M_1\left(\frac{l}{2}\right) = M_2\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{p_0 l^2}{12}.$$

Látható, hogy az $x = \frac{l}{2}$ *tengelyszimmetrikus megoszló terhelés esetén ugyanilyen szimmetriájú a kötélpoligon, míg a nyíróerő görbéje az* $x = \frac{l}{2}$, $y = 0$ *pontra centrálisan szimmetrikus.* — Ezt tudva, elegendő csupán a $0 \leqq x \leqq \frac{l}{2}$ szakaszon vizsgálni a középvonalra tengelyszimmetrikus terhelés ábráit.

3. Vizsgáljuk a 85. ábrán vázolt megoszló terhelésű rudat.

A *megoszló terhelés* ismét szimmetrikus az $x = \frac{l}{2}$ középvonalra, vagyis $p_2(x) = p_1(l-x)$, ha $\frac{l}{2} \leqq x \leqq l$; ezért — mint előbb láttuk — e szakaszon

$$R_2(x) = -R_1(l-x) \quad \text{és} \quad M_2(x) = M_1(l-x)$$

lesz. Ennek tudatában, csupán a $0 \leqq x \leqq \frac{l}{2}$ szakasz menti vizsgálatra szorítkozhatunk. Itt a megoszló terhelés:

$$p_1(x) = p_0 - \frac{2p_0}{l}x = \frac{2p_0}{l}\left(\frac{l}{2} - x\right), \quad \text{ahol} \quad 0 \leqq x \leqq \frac{l}{2},$$

továbbá a *nyíróerő:*

$$R_1(x) = R_1(0) - \int_0^x p_1(\xi)\,d\xi = \frac{p_0 l}{4} - \frac{2p_0}{l}\int_0^x \left(\frac{l}{2} - \xi\right) d\xi =$$

$$= \frac{p_0 l}{4} + \frac{p_0}{l}\left[\left(\frac{l}{2} - x\right)^2 - \frac{l^2}{4}\right] = \frac{p_0 l}{4}\left[1 - 4\frac{x}{l} + 4\frac{x^2}{l^2}\right],$$

$$R_{1\max} = R_1(0) = \frac{p_0 l}{4} = A,$$

s végül a *hajlító nyomaték:*

$$M_1(x) = \int_0^x R_1(\xi)\,d\xi = \frac{p_0 l}{4}x\left[1 - 2\frac{x}{l} + \frac{4}{3}\frac{x^2}{l^2}\right],$$

$$M_{1\max} = M_1\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{p_0 l^2}{24}.$$

4. Vizsgáljuk a 86. ábrán látható megoszló terhelésű kéttámaszú rudat.

Esetünkben:

$$p(x) = \frac{p_0}{l}x, \quad \text{ahol} \quad 0 \leqq x \leqq l.$$

Az $R(0) = A$ *reakcióerő* kiszámítása céljából írjuk fel a nyomatéki tételt a B reakció függőlegesére:

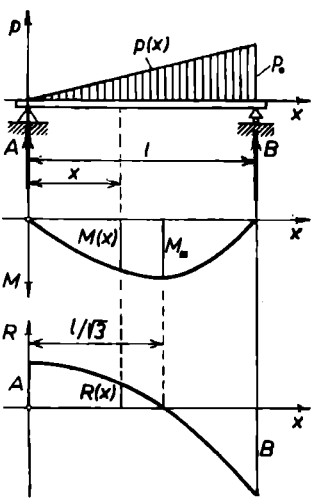
$$Al - \int_0^l p(\xi)(l - \xi)\,d\xi = Al - \frac{p_0}{l}\int_0^l \xi(l - \xi)\,d\xi =$$

$$= Al - \frac{p_0}{l}\left[\frac{l\xi^2}{2} - \frac{\xi^3}{3}\right]_0^l = Al - \frac{p_0 l^2}{6} = 0,$$

ahonnan

$$A = \frac{p_0 l}{6}, \qquad B = \frac{p_0 l}{2} - A = \frac{p_0 l}{3}.$$

Ezzel a *nyíróerő*függvény:



86. ábra

$$R(x) = R(0) - \int_0^x p(\xi)\,d\xi = \frac{p_0 l}{6} - \frac{p_0}{l}\int_0^x \xi\,d\xi = \frac{p_0 l}{6}\left(1 - 3\frac{x^2}{l^2}\right),$$

és

$$R(0)=\frac{p_0 l}{6}, \qquad R\left(\frac{l}{\sqrt{3}}\right)=0, \qquad R(l)=-\frac{p_0 l}{3};$$

végül a *hajlítónyomatéki* függvény:

$$M(x)=\int_0^x R(\xi)\,d\xi=\frac{p_0 l}{6}x\left(1-\frac{x^2}{l^2}\right),$$

$$M_{\max}=M\left(\frac{l}{\sqrt{3}}\right)=\frac{p_0 l^2}{6\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{p_0 l^2}{9\sqrt{3}}.$$

5. Szerkesszük meg a 87. ábrán vázolt terhelésű, egyik végén befogott rúdnál a külső erők ábráit!* [L. a koordináta-rendszert!]

6. Vizsgáljuk a 88. ábrán vázolt megoszló terhelésű, egyik végén befogott rudat!* [L. a koordináta-rendszert!]

7. Vizsgáljuk a 89. ábrán feltüntetett terhelésű, mindkét végén befogott rudat!*

g) A hajlított rudakról**

Az első- és másodrendű nyomaték rendkívül nagy gyakorlati jelentőségének szemléltetésére bemutatjuk ezek néhány *alkalmazását*, a hajlított rudakkal kapcsolatban.

α) **Tiszta hajlítás** | A tiszta hajlító igénybevétel *megvalósítható* a két végén támasztott és két koncentrált erővel szimmetrikusan terhelt hosszú egyenes rúd középső szakaszán; ui. itt — a 90. ábra szerint — a hajlító nyomaték $M=Pa=\text{const}$, a nyíróerő pedig $R=0$.

A tiszta hajlítás Bernoulli—Navier-féle elmélete a következő feltevésekkel él: a) a rúd egyenes súlyponti tengelyére merőleges *sík keresztmetszetek* a tiszta hajlítás alatt is síkok és a meggörbült súlyponti tengelyre, az ún. rugalmas vonalra merőlegesek maradnak; *b)* az igénybevétel sehol sem haladja meg a σ_p arányossági határt, vagyis *érvényes a* $\sigma=\varepsilon E$ *Hooke-törvény; c)* az anyag *húzással és nyomással szemben egyformán* viselkedik.

E feltevések mellett az elmélet kimutatja, hogy az említett rúdszakasz valamely x abszcisszájú merőleges keresztmetszetében a σ *normális feszültség* [a súlyponti szál (x tengely) és a hajlítás tengelye (z tengely) által meghatározott] az ún. *semleges rétegtől mért y távolsággal arányosan változik:*

$$\sigma(x,y)=\frac{E}{\varrho(x)}y,$$

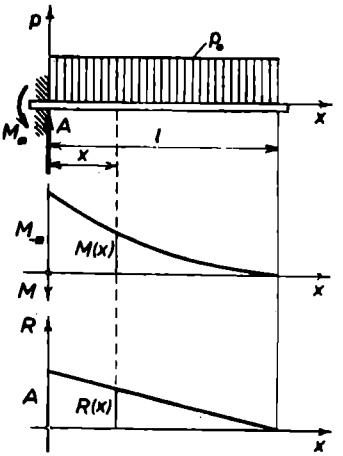
ahol

$$\frac{1}{\varrho(x)}=\frac{M}{I(x)E}$$

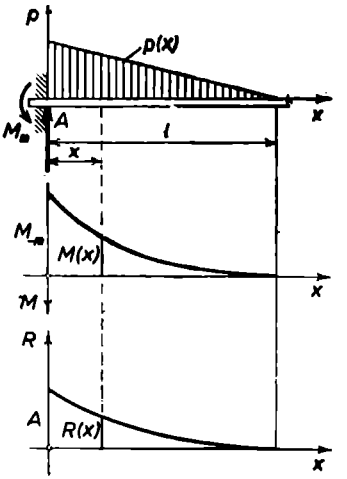
a rugalmas vonal görbülete a tiszta hajlítás alatt, M az említett rúdszakasz állandó hajlító nyomatéka, $I(x)$ a keresztmetszetnek a hajlítás (súlyponti, z) tengelyére vonatkoztatott

* Краткий технический справочник.

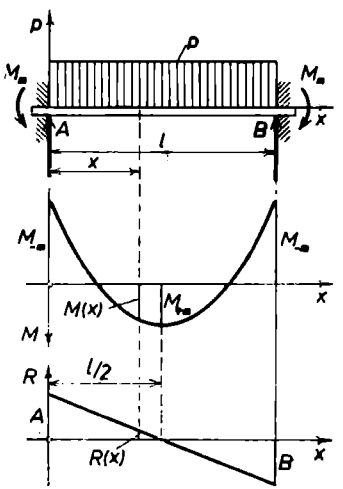
** *Mattnyánszky:* Statika (Budapest, 1948) c. műve nyomán.



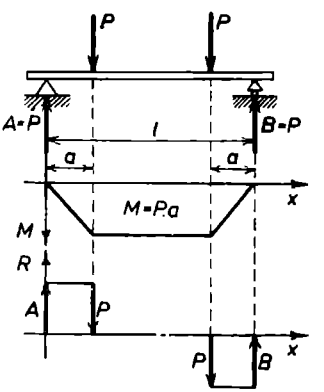
87. ábra



88. ábra



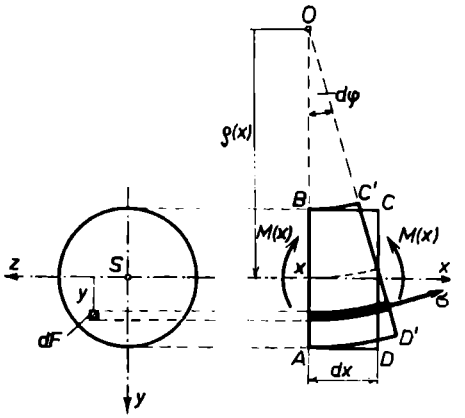
89. ábra



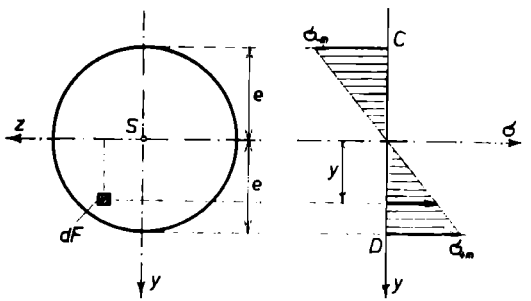
90. ábra

másodrendű nyomatéka, E a homogén rúd anyagának állandó rugalmassági modulusa (91. és 92. ábra). Gyakorlatban legtöbbször a keresztmetszet s vele az $I(x)$ is állandó. A $\varrho(x)$ kifejezést beírva, *a σ normális feszültség képlete a gyakorlatban használatos alakban* adódik:

$$\sigma(x, y) = \frac{M}{I(x)}\, y.$$



91. ábra



92. ábra

A maximális igénybevétel a semleges rétegtől legtávolabbi, $y_{max} = e$ ordinátájú, ún. *szélső szálban* adódik, nevezetesen:

$$\sigma_{max}(x) = \frac{M}{I(x)}\, e = \frac{M}{K(x)},$$

ahol $K(x) = \dfrac{I(x)}{e}$ az ún. *keresztmetszeti tényező*. (Műszaki táblázatok különböző alakú és méretű szelvényekre megadják az F, M_s, x_s, y_s, I_x, I_y, I_{xy}, K_x, K_y stb. jellemzőket.) Megjegyezzük még, hogy a fenti lineáris feszültségeloszlás csak akkor elégíti ki egyszersmind az *egyensúly* követelményeit is, ha az említett y és z tengely a keresztmetszetnek főtengelyei, azaz a keresztmetszet rájuk vonatkoztatott centrifugális nyomatéka $I_{yz}(x) = 0$.

β) Egyidejű hajlítás és nyírás

A hajlítás a gyakorlatban túlnyomórészt *nyírással jár együtt*. Ha a rúd mentén $M(x)$ változó, akkor — szemben az α) esettel — az $R(x) = \dfrac{dM(x)}{dx} \neq 0$, tehát nyíróerő is fellép.

Válasszuk a koordináta-rendszert úgy, mint az α)-ban. Feltételezzük továbbá, hogy az (x, y) sík *a rúdnak hosszanti szimmetriasíkja* és *egyszersmind a terhelés síkja* is. Az elmélet szerint a rúd x abszcisszájú, a hajlítás (súlyponti) tengelyére nézve $I(x)$ másodrendű nyomatékú, $M(x)$ hajlító nyomatékkal és $R(x)$ nyíróerővel terhelt keresztmetszetében, a hajlítás (z) tengelyétől y távolságban levő $2z(x, y)$ hosszúságú *húr mentén, a keresztmetszetre merőlegesen* (vagyis x irányban) *átlagosan*

$$\tau_x(x, y) = \frac{R(x) M_{st}(x, y)}{I(x) \cdot 2z(x, y)}$$

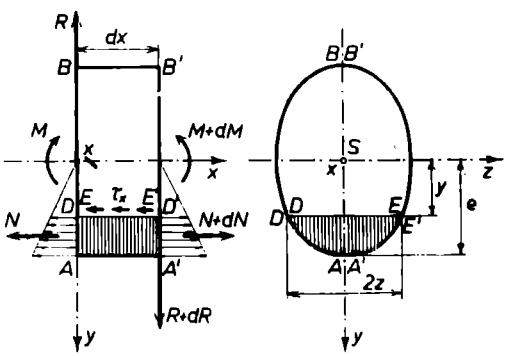
csúsztató feszültség ébred, ahol $M_{st}(x, y)$ a keresztmetszet $y \leqq \eta \leqq e$ ordinátájú darabjának (a 93. ábrán vonalkázva) elsőrendű vagy statikai nyomatéka a hajlítás (súlyponti, z) tengelyére vonatkozólag.

A dualitás tétele értelmében ugyanekkora a keresztmetszet síkjában, az említett húr mentén működő $\tau(x, y)$ csúsztató feszültségeknek *e húrra merőleges* (vagyis y irányú) *komponense:*

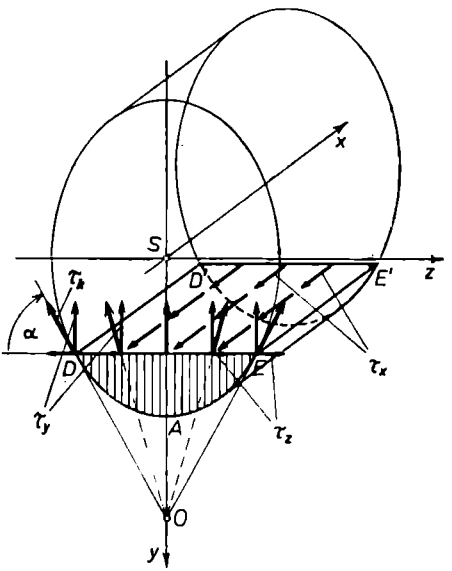
$$\tau_y(x, y) = \tau_x(x, y).$$

(L. a 94. ábrát.) E $\tau(x, y)$ feszültségeknek a húrral párhuzamos (z irányú) $\tau_z(x, y)$ komponenseiről csak annyit tudunk, hogy az y tengelyre szimmetrikus pontokban ellentetten egyenlők; a kerületi pontokban pedig a $\tau(x, y)$ feszültségek érintőlegesek; a $\tau_z(x, y)$-*ok eloszlását* a húr mentén (az y tengelytől a kerület felé 0-ról) *lineáris*an növekvőnek szokás feltételezni. *A keresztmetszetbeli* $\tau_y(x, y)$-*ok a nyíróerővel tartanak egyensúlyt.* A $\tau_y(x, y)$ feszültségkomponensek és a kerület menti

$\tau_k(x, y) = \dfrac{\tau_y(x, y)}{\cos \alpha}$ feszültségek eloszlását a példákban néhány keresztmetszetre megvizsgáljuk.



93. ábra



94. ábra

Kiemeljük, hogy *ha a terhelés síkja a rúdnak nem* (hosszanti) *szimmetriasíkja* (vagy esetleg nincs is a rúdnak ilyen szimmetriasíkja), akkor az említett $\tau_z(x, y)$ komponensek egymás közt nincsenek egyensúlyban (mint a szimmetriasíkbeli terhelés esetén), ezek eredőjeként a rudat hossztengelye körül *csavarónyomaték keletkezik, mely a* $\sigma(x, y)$ *normális feszültségek Navier-féle lineáris eloszlását is megzavarhatja.* Bár az elmélet szerint alkalmas (az ún. τ-középpontra illeszkedő) terhelés mellett, aszimmetrikus keresztmetszet esetén is elkerülhető a csavarás, *gyakorlatban* azonban, ennek körülményessége miatt, sokkal inkább szimmetrikus keresztmetszettel és terheléssel védekeznek ellene.

γ) A rugalmas szál egyenlete

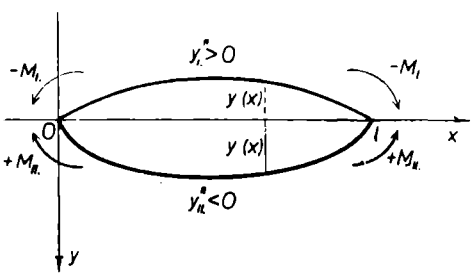
Válasszuk x tengelynek a rúd eredetileg egyenes súlyponti tengelyét, az y tengelyt pedig rá merőlegesen, a mértékadó lehajlás irányában vegyük fel. *Feltételezzük* továbbá, hogy a terhelés síkja és a rúd szimmetriasíkja megegyezik [s összecsik az (x, y) síkkal]; ez esetben ui. a rúdra csavarónyomaték nem hat, s ezért a tiszta hajlításra levezetett *Navier-féle lineáris σ-eloszlás* az egyidejűleg rendszerint fellépő nyírás ellenére is érvényben marad.

A hajlított rúd rugalmas szálának (egyelőre ismeretlen) egyenletét jelöljük $y=y(x)$ módon, ahol tehát $y(x)$ a rúd x abszcisszájú pontjának lehajlását jelenti. *A rugalmas szál görbülete* egy $P[x, y(x)]$ pontjában, az A. III. kötet 9. §-ában tanultak szerint:

$$\frac{1}{\varrho(x)}=\frac{y''(x)}{[1+y'^2(x)]^{3/2}};$$

a görbületnek a hajlítónyomatéktól, a rúd keresztmetszetének alaki viszonyaitól és a rúd anyagától függő kifejezése pedig, a *Bernoulli—Navier*-elmélet szerint (homogén rúdra):

$$\frac{1}{\varrho(x)}=\frac{M(x)}{I(x)E}.$$



95. ábra

A görbület e két kifejezését összekapcsolva, nyerjük *a rugalmas szál differenciálegyenletét:*

$$\frac{y''(x)}{[1+y'^2(x)]^{3/2}}=-\frac{M(x)}{I(x)E},$$

ahol a mínusz *előjel*et azért iktattuk be, mert $M>0$ esetén $y''<0$ a felvett koordináta-rendszerben (95. ábra).

Gyakorlatban a rudak lehajlása általában csekély $\left(\frac{f}{l}=\frac{y_{max}}{l}=0{,}002\sim 0{,}001\right)$, ennélfogva a rugalmas szál érintőinek iránytangense kicsiny, $y'^2(x)\ll 1$. Ilyen *elhanyagolással nyerjük a hajlított rúd rugalmas szálának közelítő differenciálegyenletét:*

$$y''(x)=-\frac{M(x)}{I(x)E}.$$

E differenciálegyenlet igen jelentős szerepet játszik a szilárdságtanban. A differenciálegyenletnek az adott *befogási, megtámasztási* stb. *feltételek*et kielégítő megoldását egyszerűbb esetekben *kétszeres,* változó felső határú *integrálás* útján nyerjük; az integrálok alsó határai éppen az említett feltételekből adódnak. A rúd keresztmetszete s vele az $I(x)$ is legtöbbször állandó. — Bonyolultabb, összetettebb esetekben éppen e feltételek figyelembevétele okoz nehézséget.

δ) A hajlított rudak méretezése

δ_1) A fentebbiek értelmében, a hajlításra és nyírásra terhelt rúd keresztmetszetének mindig *szimmetrikus szelvény*t választunk, és a rudat hosszanti *szimmetriasíkjában terheljük.* Így — mint láttuk — a nyírás a σ-feszültségek lineáris eloszlását nem zavarja meg.

A méretezés *alapja az, hogy a rúdban ébredő maximális σ feszültség nem lépheti túl a megengedett σ-t.*

Állandó és adott keresztmetszet esetén a σ_{max} az M_{max} hajlítónyomatékkal terhelt, ún. *veszélyes keresztmetszet szélső szálában* ébred és kell, hogy

$$\sigma_{max}=\frac{M_{max}}{K}\leqq\sigma_{meg}$$

legyen.

δ_2) Tervezéskor *húzásra-nyomásra egyformán viselkedő rúdanyag* (pl. folytvas) *esetén* az esetleg ismert veszélyes keresztmetszetre kiszámítjuk az M_{max}-ot, ennek hiányában pedig a nyomatéki ábrában, a (nyíróerőábra zérushelyein jelentkező) lokális extremumok közül kiválasztjuk a legnagyobb abszolút értékűt (M_{max}), majd az M_{max} és a σ_{meg} figyelembevételével kiszámítjuk *a szükséges keresztmetszeti tényezőt*:

$$K_{szüks}=\frac{M_{max}}{\sigma_{meg}}.$$

A $K_{szüks}$ birtokában, statikai táblázat alapján a $K_{szabv}\geqq K_{szbv}$ *szabványosított keresztmetszeti tényezőjű szelvények közül választunk*, szabadon rendelkezve még a keresztmetszet alakjával és részben méreteivel. A szelvény végleges megválasztásához támpontot nyújt a *nyírásra való ellenőrzés*. A legnagyobb abszolút értékű nyíróerővel (R_{max}) és a nyírás szempontjából mérvadó F keresztmetszet-résszel (pl. I-vasnál a gerinccel) számolva a

$$\tau_{yk}=\frac{R_{max}}{F}$$

tájékoztató átlagértéket, vagy félkeresztmetszetre számolva a pontosabb

$$\tau_{ymax}=\frac{RM_{sf_0}}{I\cdot 2z_0}$$

csúcsértéket nyerjük; egyik sem lehet nagyobb τ_{meg}-nél.

δ_3) *Húzással és nyomással szemben nem egyformán viselkedő anyagok* (pl. öntött vas) *esetén* a legnagyobb abszolút értékű M_{+max} és M_{-max} hajlító nyomatékkal egyaránt számítást végzünk a húzott és nyomott szélső szálra. Ilyenkor a keresztmetszet rendszerint nem szimmetrikus a hajlítás (z) tengelyére vonatkozólag, következésképpen *az alsó és felső szélső szálra* (96. ábra) *számított keresztmetszeti tényezők*:

$$K_a=\frac{I}{e_a}\neq K_f=\frac{I}{e_f}.$$

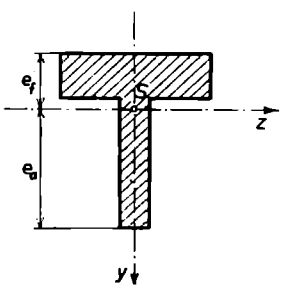
Ugyancsak nem egyenlő a húzásra, illetve nyomásra megengedett feszültség:

$$\sigma_{+meg}\neq\sigma_{-meg}.$$

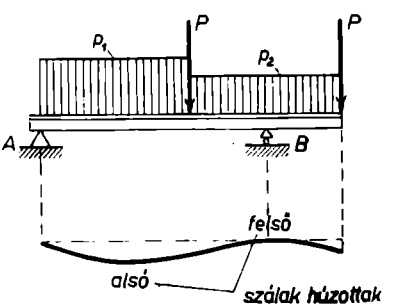
Az *ellenőrzés* tehát, pl. az M_{+max} keresztmetszetében (az alsó szélső szál húzott, a felső nyomott; l. a 97. ábrát) így történik:

$$\sigma_a=\frac{M_{+max}}{K_a}\leqq\sigma_{+meg},\qquad \sigma_f=\frac{M_{+max}}{K_f}\leqq\sigma_{-meg}.$$

Nyírásra a fentebbi módon ellenőrizzük.



96. ábra



97. ábra

δ₄) Az állandó keresztmetszetű rudat — mint láttuk — úgy méreteztük, hogy *a veszélyes keresztmetszet szélső szálában* ébredő feszültség

$$\sigma_{max}=\frac{M_{max}}{K}\leqq\sigma_{meg}$$

legyen. Eszerint a rúd minden más keresztmetszetében, még ezek szélső szálában is, a $\sigma<\sigma_{max}$; *a rúd anyaga ily módon nincs egyenletesen és a megengedett határig igénybe véve.* Célszerű tehát bizonyos esetekben a rúd anyagának egyenletesebb, jobb kihasználása érdekében olyan ún. *egyenszilárdságú változó keresztmetszetű rudat* készíteni, amelyben *valamennyi keresztmetszet szélső szálában ugyanakkora normális feszültség, mégpedig éppen a* σ_{meg} *ébred;* azaz ha egy x abszcisszájú keresztmetszet jellemzői $I(x)$, $e(x)$ és $M(x)$, akkor ott a szélső szálban:

$$\sigma_{max}(x)=\frac{M(x)}{I(x)}e(x)=\sigma_{meg}.$$

Ezen egyetlen összefüggés természetesen nem határozza meg teljesen a változó keresztmetszetű rúd szelvényeit, csak ezek

$$K(x)=\frac{M(x)}{\sigma_{meg}}$$

keresztmetszeti tényezőit. A szelvény alakja és részben méretei még szabadon választhatók; ennélfogva *ugyanazon terhelésre többféle egyenszilárdságú tartó készíthető.* (L. a példákat!)

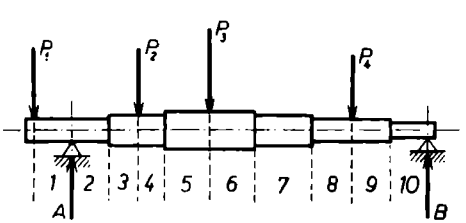
ε) A rugalmas szál szerkesztése*

A *γ)*-ban megismerkedtünk *a hajlított rúd rugalmas szálának közelítő differenciálegyenletével*, illetve ennek megoldásával, egyszerű terhelési és megtámasztási, befogási feltételek mellett.

A viszonyok — mint láttuk — *bonyolódnak, ha* a megoszló terhelést a rúd mentén két vagy több függvénnyel $[p_1(x), p_2(x), \ldots]$ kell megadni; bonyolódnak továbbá, ha a rúdra (a végeken támadó reakcióerőkön kívül) *koncentrált erők is hatnak* (esetleg a reakcióerők sem a végeken hatnak, pl. konzolos rudaknál); sőt még körülményesebbek lesznek, ha *a rúd keresztmetszete* (mint a tengelyeknél rendszerint) *csak szakaszonként állandó.* Ilyen esetekben *a terhelés és a keresztmetszet változásának helyei a rudat olyan* Δx *szakaszokra osztják, amelyekben más és más* lesz az $M_i(x)$ nyomatéki függvény, illetve a keresztmetszet I_i másodrendű nyomatéka, következésképpen e szakaszokon más és más *a rugalmas szál közelítő*

$$y_i''(x)=-\frac{M_i(x)}{I_iE}$$

differenciálegyenlete, a megtámasztási, befogási, illesztési feltételekkel együtt. Pl. a 98. ábrán vázolt tengelyt 10 szakaszra kell osztani, tehát 10 differenciálegyenletet kell megoldani és (ezek másodrendűek lévén) $2\cdot 10=20$ integrálási állandót kell meghatározni. E munka *igen fáradságos,* s a nehéz áttekinthetőség miatt nagy figyelmet igényel. Ezért a *gyakorlatban* célszerűen a gyorsabb és könnyen ellenőrizhető *szerkesztő eljárást* használják.



98. ábra

A Mohr-féle grafikus eljárás veleje azon analógia ügyes kihasználása, amely egyrészt a hajlított rúd rugalmas szálának

$$y''(x)=-\frac{M(x)}{I(x)E}$$

* L. *Hermann* i. m.

alakú, másrészt a kötél görbéjének

$$y''(x)=\frac{M''(x)}{c}=-\frac{p(x)}{c}$$

alakú differenciálegyenlete között szemmel láthatóan fennáll. (Itt feltételezzük, hogy a c pólustávolsággal rajzolt kötélgörbe vízszintes záróoldalú, és ezt választva x tengelynek, az y nyomatéki metszékek egyúttal a kötélgörbe ordinátái is; az első egyenletben az *y-ok* a rugalmas szál ordinátái, a terheletlen rúd egyenes tengelyétől mint x tengelytől mérve).

Az első és második egyenlet összevetéséből kitűnik, hogy a *hajlított rúd rugalmas szála felfogható a*

$$p(x)=\frac{M(x)}{I(x)}$$

megoszló terhelésű rúd $c=E$ pólustávolsággal rajzolt kötélgörbéjeként. (A kötélgörbe szerkesztése pedig — amint a második egyenlet alapján már régebben kijelentettük — a megoszló terhelés görbéjének *kétszeri grafikus integrálását* jelenti.)

A fentebbiekből már következnek szerkesztési teendőink. Ezeket a 99. ábrára hivatkozva ismertetjük néhány szóval. — Először a rudat ténylegesen terhelő P_i *koncentrált erőkre* (ezekbe a tengely saját súlya is be van számítva) vektorábra segítségével *nyomatéki ábrát rajzolunk*, valamilyen c_1 pólustávolsággal és célszerűen vízszintes záróoldalakkal; a rajzban a nyomatéki metszékek hosszléptéke $\mu_h=0,1$ [mm/mm], az erők (és így a vektorábra pólustávolságának) léptéke $\mu_P=0,25$ [mm/kg] és $c_1=\mu_P C_1=0,25\cdot 300=75$ mm. A nyomatéki ábra alsó határoló görbéje a kötélpoligon, a koncentrált erők függőlegesébe eső töréspontokkal. Ezt követőleg a nyomatéki ábra $\zeta(x)$ metszékeit (elegendő pl. csak a koncentrált erők és a keresztmetszetváltozások függőlegesében jelentkezőket) grafikusan szorozzuk $\frac{C_1}{I(x)}$-szel. Az így adódó metszékeket új ábrában, alkalmas μ_p [mm/kg/cm³] léptékben felrakjuk ordinátáknak, s ezek alapján meghúzhatjuk a $p(x)=\frac{M(x)}{I(x)}$ *fiktív megoszló terhelés* (poligonszerű, a keresztmetszetváltozások függőlegesében szakadásos) *görbéjét*. E fiktív megoszló terhelést most *átalakítjuk fiktív koncentrált erőkből álló terheléssé*, oly módon, hogy az említett függőlegesek által megállapított rúdszakaszok lineárisan megoszló fiktív terhelését eredőjükkel helyettesítjük; nagyságuk megegyezik a megfelelő részterületek mérőszámával, hatásvonaluk e trapéz alakú részterületek súlypontjára illeszkedik. E lépés is végezhető grafikus úton egyszerű, ismert szerkesztésekkel. A fiktív részeredőkre $\left(Q_i=\frac{p_{i-1}+p_i}{2}\Delta x_i\right)$ ezután μ_Q [mm/kg/m²] erőléptékkel, μ_h [mm/mm] hosszléptékkel és $\mu_Q E$ [mm] helyett $h=\mu_Q H$ [mm] pólustávolsággal *vektorábrát és kötélpoligont rajzolunk*, ez utóbbit vízszintes záróoldallal. Léptékek a rajzban: $\mu_Q=0,1$; $\mu_h=0,1$; továbbá $E=2\cdot 10^6$ kg/cm², $H=1000$ kg/cm²$=\frac{h}{\mu_Q}$. *E kötélpoligon már a rugalmas vonal közelítő alakját* szolgáltatja, persze a lehajlások erős nagyításával. *A tényleges y* [mm] *lehajlások e fiktív nyomatéki ábra η* [mm] *metszékeiből az*

$$y=\frac{\eta}{\mu_h}\frac{H}{E}=\frac{\eta h}{\mu_h\mu_Q E}$$

összefüggés szerint adódnak. A rajzban

$$y=\frac{\eta}{10^{-1}}\frac{1\cdot 10^3}{2\cdot 10^6}=\frac{\eta}{200}.$$

A most vázolt szerkesztésnek a *gyakorlatban* különös fontosságot biztosít azon körülmény, hogy a P_i adott koncentrált erők és a függőlegesükben adódó y_i lehajlások birtokában, *Morley*

$$n=300\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} P_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} P_i y_i^2}}$$

igen jó *közelítő képlete* alapján, *a tengely (legkisebb) veszélyes fordulatszáma* (pro perc) számítható. Esetünkben, a rajzból leolvasott P_i és $y_i=\frac{\eta_i}{200}$ értékek felhasználásával, a képlet kb. $n=3320$ fordulat/perc eredményt szolgáltat.

Példák és feladatok

1. Állapítsuk meg az α)-ban említett és ábrázolt (90. ábra) kéttámaszú rúd *tiszta hajlításra* igénybe vett, állandó M lehajlító nyomatékkal terhelt *középső szakaszán* a σ_{max}-ot, feltéve, hogy a rúd állandó keresztmetszete: *a)* d átmérőjű kör, *b)* D és d átmérőjű körgyűrű, *c)* a és b élű téglalap (a hajlítás tengelye az a éllel párhuzamos).

Az α)-ban megadott formula szerint (tekintettel az állandó keresztmetszetre):

$$\sigma_{max}=\frac{M}{I}e=\frac{M}{K}.$$

Állapítsuk meg tehát mindhárom esetben a K keresztmetszeti tényezőt.

Az *a)* esetben:

$$I=\frac{r^4\pi}{4}=\frac{d^4\pi}{64} \quad \text{és} \quad e=r=\frac{d}{2},$$

s így a *keresztmetszeti tényező:*

$$K=\frac{I}{e}=\frac{d^3\pi}{32}.$$

A *b)* esetben:

$$I=\frac{\pi}{64}(D^4-d^4) \quad \text{és} \quad e=\frac{D}{2},$$

s így:

$$K=\frac{\pi}{32}\,\frac{D^4-d^4}{D}.$$

Végül a *c)* esetben:

$$I=\frac{ab^3}{12} \quad \text{és} \quad e=\frac{b}{2},$$

s így:

$$K=\frac{ab^2}{6}.$$

Ezeket behelyettesítve a fentebbi formulába, nyerjük a σ_{max} kifejezését mindhárom esetre.

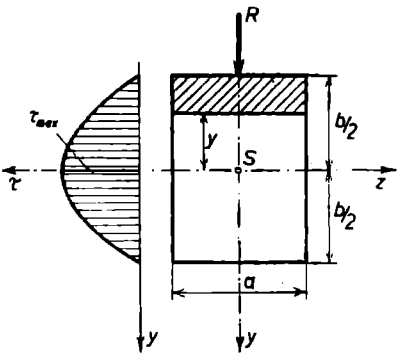
2. A β)-ban említett feltételek mellett és az ott megadott közelítő formula alapján határozzuk meg a $\tau_y(y)$ *feszültségkomponensek eloszlását* egy R nyíróerővel terhelt *téglalap alakú rúdkeresztmetszetben;* ennek élei: a és b, a hajlítás (z) tengelye párhuzamos az a éllel.

A megadott *formula* szerint:

$$\tau_y(y) = \frac{RM_{st}(y)}{I \cdot 2z},$$

ahol most $2z = a$, $I = \frac{ab^3}{12}$ és a téglalap $y \leqq \eta \leqq \frac{b}{2}$ sávjának (100. ábra) elsőrendű vagy *statikai nyomatéka*:

$$M_{st}(y) = \int_y^{b/2} a\, d\eta \cdot \eta = \frac{a}{2}\left(\frac{b^2}{4} - y^2\right).$$



100. ábra

Ezek felhasználásával nyerjük:

$$\tau_y(y) = \frac{R \cdot \frac{a}{2}\left(\frac{b^2}{4} - y^2\right)}{\frac{ab^3}{12} \cdot a} = \frac{6R}{ab^3}\left(\frac{b^2}{4} - y^2\right).$$

A $\tau_y(y)$ eloszlása tehát *parabolikus*. Jellegzetes értékek:

$$\tau_y\left(+\frac{b}{2}\right) = \tau_y\left(-\frac{b}{2}\right) = 0,$$

$$\tau_y(0) = \tau_{y\,max} = \frac{3R}{2ab} = \frac{3}{2}\,\frac{R}{F} = \frac{3}{2}\,\tau_k.$$

vagyis a maximális τ_y az R/F módon nyerhető átlagos τ_k-nak másfélszerese. E megállapítás $b \gg a$ esetén kitűnő *egyezést* mutat a pontos vizsgálatokkal.

3. Az előző módon határozzuk meg *a kerület menti* $\tau_k(y) = \frac{\tau_y(y)}{\cos\varphi}$ *feszültségek eloszlását, kör keresztmetszet esetén.*

Jelen esetben (101. ábra) $2z = 2r\cos\varphi$, $I = \frac{r^4\pi}{4}$, a vonalkázott körszelet *statikai nyomatéka* pedig:

$$M_{st}(y) = \int_y^r \eta\, dF = 2\int_y^r \eta\zeta\, d\eta = 2r^3 \int_\varphi^{\pi/2} \cos^2\psi \sin\psi\, d\psi =$$

$$= -\frac{2}{3}r^3\left[\cos^3\psi\right]_\varphi^{\pi/2} = \frac{2}{3}r^3\cos^3\varphi = \frac{2}{3}r^3\left[1 - \left(\frac{y}{r}\right)^2\right]^{3/2}.$$

Ezek alapján, a megadott *formula* szerint:

$$\tau_k(y) = \frac{\tau_y(y)}{\cos\varphi} = \frac{R \cdot \frac{2}{3}r^3\cos^3\varphi}{\frac{r^4\pi}{4} \cdot 2r\cos\varphi \cdot \cos\varphi} = \frac{4}{3}\,\frac{R}{r^2\pi}\cos\varphi =$$

$$=\frac{4}{3}\frac{R}{F}\left[1-\left(\frac{y}{r}\right)^2\right]^{1/2}=\frac{4}{2}\tau_0\left[1-\left(\frac{y}{r}\right)^2\right]^{1/2}=\tau_{max}\left[1-\left(\frac{y}{r}\right)^2\right]^{1/2}.$$

Ennélfogva a legnagyobb $\tau_k(y)$ ismét a semleges rétegben ($y=0$) ébred, továbbá $\tau_k(r)=$ $=\tau_k(-r)=0$. Figyelemre méltó, hogy:

$$\frac{\tau_k^2}{\tau_{max}^2}+\frac{y^2}{r^2}=1,$$

azaz a kerületi $\tau_k(y)$ feszültségek eloszlása r és τ_{max} féltengelyű *ellipszis*sel ábrázolható.

4. Tervezzük meg az adott terhelésű és állandó keresztmetszetű rúd szelvényét, ha a rúd anyaga *öntött vas*, és ennek megengedett igénybevétele húzásra: $\sigma_{+meg}=250$ kp/cm^2, nyomásra: $\sigma_{-meg}=600$ kg/cm^2 és nyírásra $\tau_{meg}=150$ kg/cm^2 (102. ábra).

A *reakcióerők:*

$$\Sigma P_i=A+B-10=0,$$

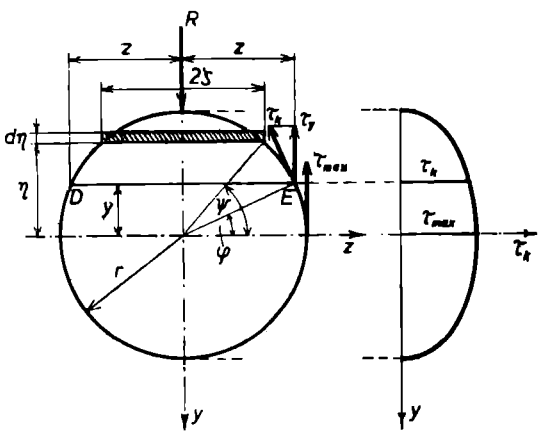
$$M_B=-6+A\cdot 3=0,$$

ahonnan $A=2$t, $B=8$t (mindkettő felfelé mutató vektorú). Ezek birtokában megrajzolhatjuk a nyíróerők ábráját. Erről megállapítható, hogy *a hajlító nyomaték szélső értékei:*

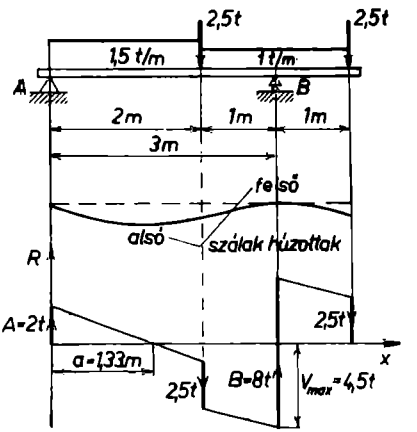
$$\text{az } x_1=\frac{2}{1{,}5}=1{,}33 \text{ m helyen} \quad M_{+max}=2\cdot 1{,}33-\frac{1{,}5}{2}1{,}33=1{,}33 \text{ mMp},$$

$$\text{az } x_2=x_B=3 \text{ m helyen} \quad M_{-max}=-2{,}5\cdot 1-1\cdot 1\cdot 0{,}5=-3 \text{ mMp}.$$

A legnagyobb nyíróerő az $x_2=x_B=3$ m helyen ébred: $R_{max}=4{,}5$ Mp.



101. ábra

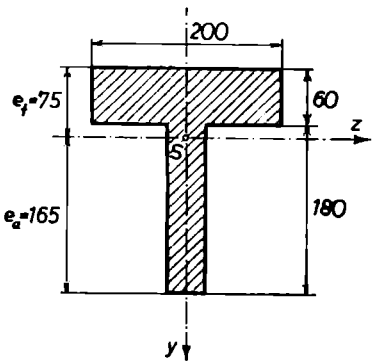


102. ábra

Minthogy az öntöttvas rúd nem egyformán viselkedik húzással és nyomással szemben, ezért a 103. ábrán látható, a hajlítás (z) tengelyére *nem szimmetrikus* T *szelvényt* választottunk. Ennek adatai táblázat szerint: $I_z=8784$ cm^4; $e_a=16{,}5$ cm; $e_f=7{,}5$ cm. Tekintve, hogy az adatok szerint $\sigma_{+meg}<\sigma_{-meg}$, ezért a rudat úgy kívánatos elhelyezni, hogy a leg-

nagyobb abszolút értékű hajlító nyomaték keresztmetszetében (esetünkben a *B* függőlegesében) a húzott szélső réteg a semleges réteghez közelebb kerüljön. A 102. ábra szerint a *B* függőlegesében a felső szál húzott, a T szelvényű rúd *széles öve* tehát *felül* legyen. Ilyen elhelyezés mellett *ellenőrizzük* mindkét veszélyes keresztmetszet szélső rétegeiben a feszültséget.

Az x_1 helyen az alsó húzott rétegben:



103. ábra

$$\sigma_{+a} = \frac{M_1}{I_z} e_a = \frac{133\,000}{8784} 16{,}5 = 251 \text{ kp/cm}^2 \approx \sigma_{+meg},$$

a felső nyomott rétegben:

$$\sigma_f = \frac{M_1}{I_z} e_f = \frac{133\,000}{8784} 7{,}5 = 114 \text{ kp/cm}^2 < \sigma_{-meg}.$$

Az $x_2 = x_B$ helyen az alsó nyomott rétegben:

$$\sigma_{-a} = \frac{M_z}{I_z} e_a = \frac{300\,000}{8784} 16{,}5 = 564 \text{ kp/cm}^2 < \sigma_{-meg},$$

a felső húzott rétegben:

$$\sigma_{-f} = \frac{M_z}{I_z} e_f = \frac{300\,000}{8784} 7{,}5 = 256 \text{ kp/cm}^2 \approx \sigma_{+meg}.$$

Látható, hogy a rúdban ébredő maximális húzófeszültség mindössze 6 kp/cm²-rel (2,4 %) lépi túl a megengedettet, ami még elfogadható.

Ellenőrzés nyírásra; a gerincben [$F_g = 72$ cm²] ébredő közepes τ_{yk} feszültség:

$$\tau_{yk} = \frac{R_{max}}{F_g} = \frac{4500}{72} = 62{,}6 \text{ kp/cm}^2 < \tau_{meg},$$

míg a félkeresztmetszetre számított pontosabb érték:

$$\tau_{ymax} = \frac{R_{max} M_{st0}}{I_y \cdot 2z_0} = \frac{4500(4 \cdot 16{,}5 \cdot 8{,}25)}{8784 \cdot 4{,}0} = 70 \text{ kp/cm}^2 < \tau_{meg}.$$

A felvett szelvény tehát nyírás szempontjából is megfelelő.

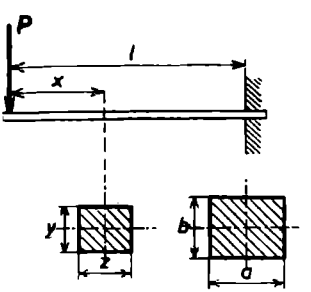
5. Vizsgáljuk az egyik végén befogott, a másik végén *P* koncentrált erővel terhelt téglalap-keresztmetszetű *egyenszilárdságú rudak*at!

A *P* erőtől x távolságban levő keresztmetszetben a hajlító nyomaték: $M(x) = Px$, a keresztmetszet másodrendű nyomatéka: $I(x) = \frac{zy^3}{12}$ és a szélső réteg távolsága $e(x) = \frac{y}{2}$ (104. ábra).

*A méretek meghatározásá*ra az

$$\frac{M(x)}{I(x)} e(x) = \frac{Px}{\frac{zy^3}{12}} \frac{y}{2} = \frac{6Px}{zy^2} = \sigma_{meg} = \text{const.}$$

egyenlet áll rendelkezésre. A négyszög keresztmetszet egyik méretét még szabadon választhatjuk.



104. ábra

a) Legyen pl. *a keresztmetszet magassága* $y = b$ *állandó*. Az egyenletet z-re megoldva:

$$z = \frac{6P}{\sigma_{meg} b^2} x = C_1 x,$$

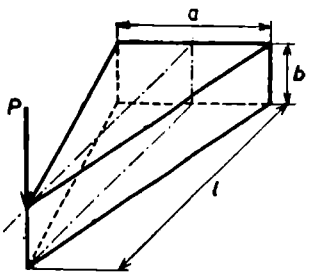
vagyis x-szel arányosan változik (105. ábra); továbbá:

$$z(l) = a = \frac{6Pl}{b^2\sigma_{meg}}.$$

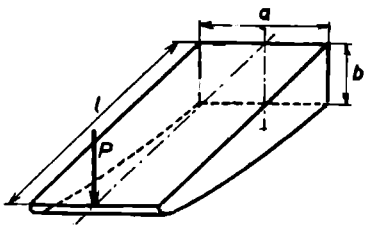
A rudat a *nyírás* miatt szimmetrikusan kell alakítani, s ugyanezért a P erő alatt a rúd szélessége nem lehet zérus, vagyis a rúd nem végződhetik élben. Egyébként a nyírást figyelmen kívül hagytuk. Egyenszilárdságú rudunk V_e térfogata nyilván félakkora, mint a befogási keresztmetszetével egyenlő állandó keresztmetszetű rúdé (V), az *anyagmegtakarítás* tehát 50%-os.

b) Legyen most *a keresztmetszet szélessége* $z = a$ *állandó*. Ez esetben (106. ábra):

$$y^2 = \frac{6P}{a\sigma_{meg}} x = C_2 x,$$



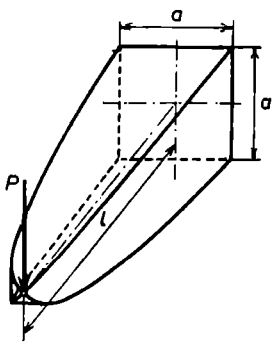
105. ábra



106. ábra

vagyis a rúd magassága (a befogás felé haladva) parabolikusan növekszik. A rúd térfogata:

$$V_e = \int_0^l a\sqrt{C_2}\sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}a\sqrt{C_2 l}\cdot l = \frac{2}{3}F_{bef}\,l = \frac{2}{3}V,$$



107. ábra

vagyis $\frac{2}{3}$-a a befogási keresztmetszetével egyenlő állandó keresztmetszetű rúdnak; az *anyagmegtakarítás* tehát 33%-os. A nyírásra itt sem voltunk tekintettel.

c) Legyen *a keresztmetszet négyzet, azaz* $z = y$. Ekkor (107. ábra):

$$y^3 = z^3 = \frac{6P}{\sigma_{meg}} x = C_3 x,$$

vagyis a rúd profilgörbéi harmadfokú parabolák. A rúd térfogata:

$$V_e = C_3^{2/3}\int_0^l x^{2/3}\,dx = \frac{3}{5}C_3^{2/3}l^{2/3}\,l = \frac{3}{5}F_{bef}\,l = \frac{3}{5}V.$$

vagyis a *megtakarítás* 40%-os.

6. Vizsgáljuk az egyik végén befogott, végig egyenletesen megoszló (p_0) terhelésű és állandó $y = b$ magasságú *egyenszilárdságú rudat*. (A nyírást hagyjuk figyelmen kívül.)

Jelen esetben (l. a 108. ábrát):

$$\frac{M(x)}{I(x)}\,e(x)=\frac{p_0\frac{x}{2}}{\frac{zb^3}{12}}\,\frac{b}{2}=\frac{3p_0x^2}{b^2x}=\sigma_{meg},$$

ahonnan:

$$z=\frac{3p_0}{b^2\sigma_{meg}}\,x^2=Cx^2,$$

vagyis a rúd szélessége *parabolikusan* változik; továbbá:

$$z(l)=a=\frac{3p_0l^2}{b^2\sigma_{meg}}.$$

A rúd térfogata:

$$V_e=C\int_0^l x^2\,dx=\frac{1}{3}\,Cl^2bl=\frac{1}{3}\,F_{bef}\,l,$$

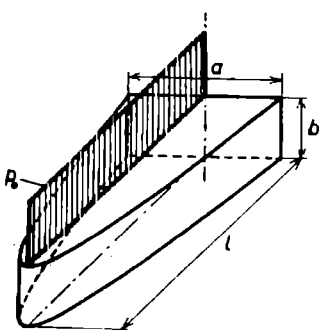
vagyis az *anyagmegtakarítás* 67%-os.

7. Vizsgáljuk (a nyírást figyelmen kívül hagyva) az egyik végén befogott $p(x)=\frac{p_0}{l}\,x$ megoszló terhelésű és állandó $y=b$ magasságú *egyenszilárdságú rud*at.

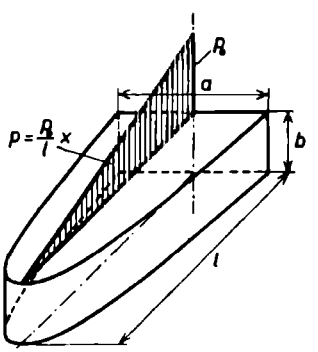
Esetünkben (109. ábra):

$$M(x)=\frac{p_0}{l}\int_0^x(x-\xi)\xi\,d\xi=\frac{p_0}{l}\left[\frac{x\xi^2}{2}-\frac{\xi^3}{3}\right]_0^x=\frac{p_0x^3}{6l}=$$

$$=\frac{p_0x^2}{2l}\cdot\frac{x}{3}.$$



108. ábra



109. ábra

Ezzel, az előző példáknál látott módon:

$$\frac{M(x)}{I(x)}\,e(x)=\frac{p_0x^3}{6l\frac{zb^3}{12}}\,\frac{b}{2}=\frac{p_0x^3}{lb^2z}=\sigma_{meg},$$

ahonnan:

$$z = \frac{p_0}{lb^2\sigma_{meg}} x^3 = Cx^3,$$

továbbá:

$$z(l) = a = \frac{p_0 l^2}{b^2\sigma_{meg}}.$$

A rúd térfogata:

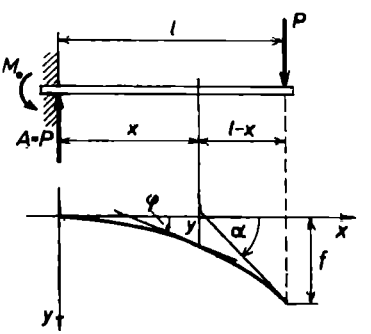
$$V_e = Cb \int_0^l x^3\,dx = \frac{1}{4} bCl^3 \cdot l = \frac{1}{4} F_{bef}\, l,$$

vagyis a *megtakarítás* 75%-os.

8. Határozzuk meg az egyik végén befogott, a másik végén P koncentrált erővel terhelt állandó keresztmetszetű *rúd rugalmas szálának egyenletét*, majd $y_{max} = f$ *lehajlását*.

A *hajlítónyomaték* a befogástól x távolságban (110. ábra), az előjelre is ügyelve:

$$M(x) = -P(l-x).$$



110. ábra

Ezzel a rugalmas szál *differenciálegyenlete:*

$$y''(x) = -\frac{M(x)}{IE} = +\frac{P(l-x)}{IE}.$$

A most következő *integrálás határai* azon körülményből adódnak, hogy az $x = 0$ helyen a befogás miatt a súlyponti szál nem szenved lehajlást $[y(0) = 0]$, és érintője is az eredeti vízszintes marad $[y'(0) = 0]$. Ennélfogva a rugalmas szál érintő-iránytangense az x helyen:

$$y'(x) = \int_0^x y''(\xi)\,d\xi = \frac{P}{IE}\int_0^x (l-\xi)\,d\xi = \frac{P}{IE}\left(lx - \frac{x^2}{2}\right),$$

a rugalmas szál egyenlete pedig:

$$y(x) = \int_0^x y'(\xi)\,d\xi = \frac{P}{IE}\int_0^x \left(l\xi - \frac{\xi^2}{2}\right)d\xi = \frac{P}{2IE}\left(lx^2 - \frac{x^3}{3}\right).$$

A P *erő függőlegesében* az érintő hajlásszöge és a lehajlás:

$$\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha = y'_{max} = y'(l) = \frac{Pl^2}{2IE}$$

és

$$f = y_{max} = y(l) = \frac{Pl^3}{3IE}.$$

Értelemszerűen ugyanezen eredményre jutunk, ha a koordináta-rendszert másként vesszük fel, pl. úgy, hogy origója a P függőlegesére essék.

9. Vizsgáljuk az egyik végén befogott (a felvett koordináta-rendszerben) $p(x) = \frac{p_0}{l}(l-x)$

megoszló terhelésű, állandó keresztmetszetű *rúd rugalmas szálát*, valamint y'_{max} és y_{max} értékét.

Az *f) γ)* 6. pl. és a 88. ábra értelmében:

$$M(x) = -\int_x^l \frac{p_0}{l}\underbrace{(l-\xi)}_{u}\underbrace{(\xi-y)}_{v'}\,d\xi = \cdot$$

$$= -\frac{p_0}{l}\left\{\left[(l-\xi)\frac{(\xi-x)^2}{2}\right]_x^l + \frac{1}{2}\int_x^l (\xi-x)^2\,dx\right\} = -\frac{p_0}{6l}(l-x)^3.$$

A rugalmas szál *differenciálegyenlete* tehát:

$$y''(x) = +\frac{p_0(l-x)^3}{6l\,IE};$$

az $x=0$ keresztmetszet befogásából adódó *kezdeti feltételek* pedig:

$$y'(0) = y(0) = 0.$$

Ennélfogva *a rugalmas szál* érintő-iránytangense, illetve *egyenlete:*

$$y'(x) = \int_0^x y''(\xi)\,d\xi = \frac{p_0}{6l\,IE}\int_0^x (l-\xi)^3\,d\xi = \frac{p_0}{24l\,IE}[l^4-(l-x)^4],$$

illetve

$$y(x) = \int_0^x y'(\xi)\,d\xi = \frac{p_0}{24l\,IE}\int_0^x l^4-(l-\xi)^4\,d\xi = \frac{p_0}{24l\,IE}\left[l^4x + \frac{1}{5}(l-x)^5 - \frac{1}{5}l^5\right].$$

Ezekből:

$$\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha = y'_{max} = y'(l) = \frac{p_0 l^3}{24IE}$$

és

$$f = y_{max} = y(l) = \frac{p_0 l^4}{30IE}.$$

10. Hasonló megoszló terhelés és befogás mellett vizsgáljuk a 7. pl.-ban tárgyalt állandó b magasságú, *egyenszilárdságú rúd rugalmas szálának* egyenletét és járulékait!

A 7. példa értelmében és az ottanihoz hasonló koordináta-rendszerben (l. a 109. ábrát):

$$\frac{M(x)}{I(x)} = \frac{\sigma_{meg}}{e(x)} = \frac{2\sigma_{meg}}{b},$$

tehát a rugalmas szál *differenciálegyenlete* és a befogásból adódó *feltételek:*

$$y''(x) = \frac{2\sigma_{meg}}{Eb}; \qquad y(l) = y'(l) = 0.$$

Ezek alapján:

$$y'(x) = -\int_x^l y''(\xi)\,d\xi = -\frac{2\sigma_{meg}}{Eb}(l-x)$$

és

$$y(x) = -\int_x^l y'(\xi)\,d\xi = \frac{2\sigma_{meg}}{Eb}\int_x^l (l-\xi)\,d\xi = \frac{\sigma_{meg}}{Eb}(l-x)^2.$$

Az előbbiekből nyerjük *végül:*

$$\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha = y'_{max} = y'(0) = -\frac{2\sigma_{meg}l}{Eb},$$

$$f = y_{max} = y(0) = \frac{\sigma_{meg}l^2}{Eb} = \frac{p_0 l^4}{Eab^3} = \frac{p_0 l^4}{12IE},$$

vagyis az egyenszilárdságú rúd maximális lehajlása akkora, mint a befogási keresztmetszetével egyenlő állandó keresztmetszetű rúdé.

Figyelemre méltó, hogy az $\frac{M(x)}{I(x)} = \frac{\sigma_{meg}}{e(x)}$ körülmény következtében a számítás *egyszerűbb.*

11. Igazoljuk, hogy az egyik végén befogott és végig egyenletesen megoszló (p_0) terhelésű *rúd maximális lehajlása* állandó keresztmetszet esetén:

$$f = \frac{p_0 l^4}{8IE},$$

állandó b magasságú *egyenszilárdságú rúd esetén* pedig:

$$f = \frac{3p_0 l^4}{Eab^3} = \frac{p_0 l^4}{4IE},$$

(vagyis az utóbbi az előbbinek kétszerese).

12. Vizsgáljuk az *f) γ)* 4. példában tárgyalt lineárisan megoszló terhelésű, két végén támasztott *rúd rugalmas szálát* és járulékait! (L. a 86. ábrát.)

Az idézett példa szerint:

$$M(x) = \frac{p_0 l}{6}x\left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right).$$

A rugalmas szál *differenciálegyenlete* tehát:

$$y''(x) = -\frac{p_0 l}{6EI}x\left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right),$$

a megtámasztási *feltételek* (kerületi feltételek) pedig:

$$y(0) = y(l) = 0.$$

Bizonyos $x = a$ helyen:

$$y'(a) = 0, \quad \text{de} \quad y''(a) \neq 0, \quad \text{tehát} \quad y(a) = y_{max}.$$

Következésképpen:

$$y'(x) = \int_a^x y''(\xi)\,d\xi = -\frac{p_0 l}{6IE}\int_a^x \left(\xi - \frac{\xi^3}{l^2}\right)d\xi =$$

$$= -\frac{p_0 l}{12IE}\left[\left(x^2 - \frac{x^4}{2l^2}\right) - \left(a^2 - \frac{a^4}{2l^2}\right)\right];$$

$$y(x)=\int_0^x y'(\xi)\,d\xi=-\frac{p_0 l_1}{12IE}\int_0^x\left[\left(\xi^2-\frac{\xi^4}{2l^2}\right)-\left(a^2-\frac{a^4}{2l^2}\right)\right]d\xi=$$

$$=-\frac{p_0 l}{12IE}\left[\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{10l^2}\right)-x\left(a^2-\frac{a^4}{2l^2}\right)\right].$$

Az a értékét az $y(l)=0$ feltételből határozzuk meg:

$$l\left[l^2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{10}\right)-a^2+\frac{a^4}{2l^2}\right]=0;$$

$$a^4-2l^2a+\frac{7}{15}l^4=0;$$

$$a^2_{I,II}=l^2\left(1\pm\sqrt{1-\frac{7}{15}}\right).$$

A négy gyök közül csupán az

$$a=l\sqrt{1-\sqrt{\frac{8}{15}}}=l\sqrt{1-0{,}73}=0{,}52l$$

gyöknek van értelme *műszakilag* (ui. a nem lehet l-nél nagyobb és nem lehet negatív) Az $a=0{,}52\ l$ helyen a lehajlás:

$$f=y(0{,}52\,l)=\frac{p_0 l^4}{360IE}(7\cdot 0{,}52-10\cdot 0{,}52^3+3\cdot 0{,}52^5)=$$

$$=\frac{p_0 l^4}{360IE}(3{,}64-1{,}4+0{,}11)=0{,}006\,52\frac{p_0 l^4}{IE}.$$

13. Igazoljuk, hogy a végig egyenletesen megoszló (p_0) terhelésű és két végén támasztott *rúd maximális lehajlása:*

$$f=y_{\max}=y\left(\frac{l}{2}\right)=\frac{5}{384}\frac{p_0 l^4}{IE}.$$

Az $y'\left(\frac{l}{2}\right)=0$ és $y(l)=0$, [vagy $y(0)=0$] feltételekkel dolgozzunk (szimmetriaokok miatt).

14. Igazoljuk, hogy az *f) γ)* 2. pl.-ban tárgyalt *rúd maximális lehajlása:*

$$f=y_{\max}=y\left(\frac{l}{2}\right)=\frac{p_0 l^4}{120IE}.$$

15. Szerkesszük meg az *ε)*-ban részletezett módon a 257. ábrán látható *tengely rugalmas szálát*, és igazoljuk, hogy *legnagyobb lehajlása:*

$$f=y_{\max}=y\left(\frac{l}{2}\right)=0{,}051\text{ cm}.$$

(A tengely és a terhelés szimmetriája miatt elegendő a szerkesztést a tengely egyik, pl. bal felére elvégezni.)

16. Szerkesszük meg a 258. ábrán látható *rúd rugalmas szálát*, és igazoljuk, hogy *legnagyobb lehajlása:*

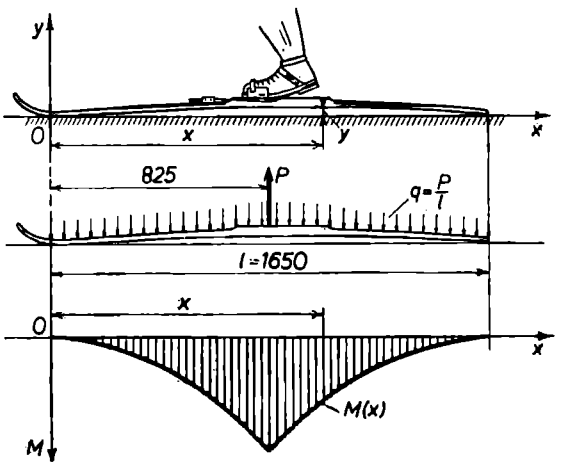
$$f=y_{\max}=y(l)=0{,}131\text{ cm}.$$

17. Igazoljuk a rugalmas szál megszerkesztése útján, hogy a 259. ábrán vázolt *tengely maximális lehajlása:*

$$f = y_{max} = 0{,}023 \text{ cm}.$$

***18.** Milyen *előzetes* $y(x)$ *felhajlással* kell készíteni a *síléc*et, hogy a síelő súlya — sík és kemény úton — *egyenletesen* oszoljék el a sí csúszófelülete alatti havon.*

Az *előhajlított* síléc a síelő P koncentrált súlya és a hó $q = P/l$ egyenletesen megoszló reakcióereje hatására kiegyenesedik (itt l a sí felfekvési hossza). Az *egyenes* sílécre működő ellentétes értelmű koncentrált és reakcióerő (111. ábra) tehát éppen a kívánt felhajlást idézi elő. A *hajlítónyomaték* nagysága ily módon a P koncentrált erő függőlegesétől balra, illetve jobbra felvett tetszőleges x keresztmetszetre vonatkozólag:



111. ábra

$$M_1(x) = \frac{1}{2} qx^2 ,$$

illetve

$$M_2(x) = \frac{1}{2} q(l-x)^2 ,$$

a P erő függőlegesében pedig:

$$M\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{1}{8} ql^2 = M_{max} .$$

E nyomatékok mind negatív értelműek. Célszerű e körülményt figyelmen kívül hagyni, s ennek megfelelően a síléc mint (csekély felhajlást szenvedő) hajlított rúd közelítő *differenciálegyenlet*ét előjeleltéréssel,

azaz

$$y'' = \frac{M}{IE}$$

alakban használni.**

A fentebbiek szerint az $y(x)$ felhajlási függvényt mint az

$$y'' = \frac{M}{IE}$$

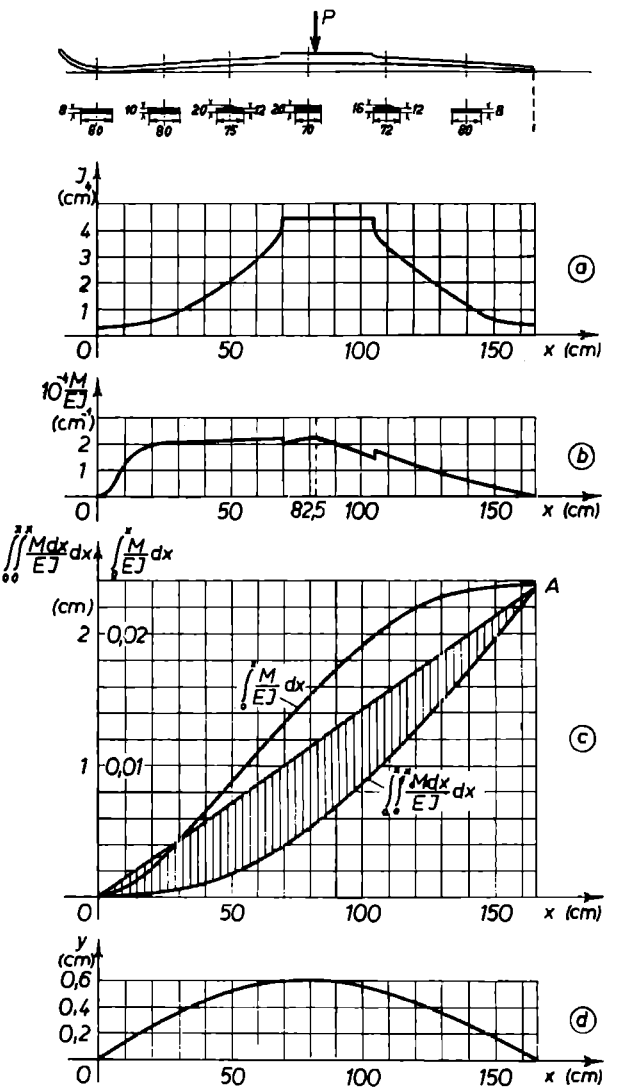
differenciálegyenlet

$$y(0) = 0 \quad \text{és} \quad y(l) = 0$$

*kerületi feltételek*et kielégítő partikuláris megoldását keressük. A sí változó keresztmetszetű, tehát a keresztmetszetek I *inercianyomatéka* is változik az x függvényében, méghozzá elég bonyolult módon (112. ábra). Ezért legcélszerűbb a differenciálegyenlet keresett partikuláris megoldását (kétszeri) grafikus integrálással meghatározni.

A $P = 60$ kp, $l = 165$ cm és a feltüntetett síkkeresztmetszeti *adatok* mellett megrajzolt $M(x)$- és $I(x)$-görbe alapján megszerkeszthetjük $y''(x) = \frac{M(x)}{EI(x)}$ *görbé*jét; fára $E = 10^5$ kp/cm^2 (l. az ábrát). Minthogy

* Яблонский i. m.
** L. a g) γ)-t és a 95. ábrát.


P
J (cm⁴)
4
3
2
1
0
50
100
150
x (cm)
a
10⁻⁴M/EJ (cm⁻¹)
2
1
0
50
82,5
100
150
x (cm)
b
∫∫ M dx/EJ dx
∫ M/EJ dx
(cm)
2
1
0,02
0,01
A
c
0
50
100
150
x (cm)
y (cm)
0,6
0,4
0,2
0
50
100
150
x (cm)
d

112. ábra

$$y'(x)=\int_0^x \frac{M(x)}{EI(x)}\,dx+C_1 \quad \text{és} \quad y(x)=\int_0^x\int_0^x \frac{M(x)\,dx}{EI(x)}\,dx+C_1x+C_2\,,$$

ahol a kerületi feltételek szerint:

$$y(0)=C_2=0 \quad \text{és} \quad y(l)=\int_0^l\int_0^x \frac{M(x)\,dx}{EI(x)}\,dx+C_1l=0,$$

ennélfogva a keresett partikuláris megoldás:

$$y(x)=\int_0^x\int_0^x \frac{M(x)\,dx}{EI(x)}\,dx-\frac{x}{l}\int_0^l\int_0^x \frac{M(x)\,dx}{EI(x)}\,dx.$$

Ennek az értelmében *grafikus integrálás*sal megszerkesztjük az

$$y_0'(x)=\int_0^x \frac{M(x)}{EI(x)}\,dx, \quad \text{majd az} \quad y_0(x)=\int_0^x\int_0^x \frac{M(x)\,dx}{EI(x)}\,dx$$

görbét, végül meghúzzuk az $\eta(x)=\frac{y_0(l)}{l}\,x$ egyenest. (L. a 112. ábrát.) E két utóbbi sraffozott (előjeles) *ordinátakülönbségei* már a keresett *felhajlás*okat szolgáltatják; ezeket (vízszintes tengelytől mérve) külön ábrában is feltüntettük [figyelmen kívül hagyva az y tengely kótázásánál, hogy $y(x)=y_0(x)-\eta(x)\leqq 0$, összhangban az $y''(x)\geqq 0$ körülménnyel.]* Amint ezen ábrából látható, a legnagyobb felhajlás:

$$y_{\max}\approx 6 \text{ mm}.$$

Gyakorlatban szokásos még nagyobb felhajlítást eszközölni, aminek eredményeként a hóra működő nyomás a síléc végein nagyobb lesz, mint középen. Kemény havon ez javítja a sílelés irányíthatóságát és állékonyságát, viszont rontja a siklási viszonyokat.

* L. a g), γ)-t és a 95. ábrát

8. §. EGYÉB NYOMATÉKOK STB.

(HIDROMECHANIKAI ÉS EGYÉB ALKALMAZÁSOK)

a) Folyadék nyomóereje edény falára

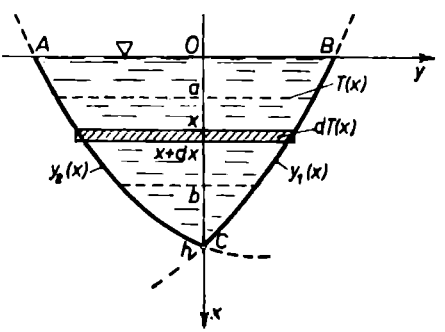
α) Függélyes sík falra

Vegyük fel a derékszögű *koordináta-rendszer*t a fal függélyes (belső, nedves) síkján, az ábrázolt módon: vagyis az x tengely illeszkedjék e felület C mélypontjára, az y tengely pedig a folyadéktükörbe essék (113. ábra).

A folyadéknyomás alatt álló *falfelület*et alulról az $y_1(x)$ és $y_2(x)$ görbe, felülről az $x=0$ egyenes (a vízszint) határolja. A falfelület $[0, x]$ szakasz menti $T(x)$ területi mérőszámának *differenciálja* az $[x, x+dx]$ szakaszon:

$$dT(x) = [y_1(x) - y_2(x)]\,dx,$$

[az ábrán $y_2(x) < 0$, így $-y_2(x) > 0$, azaz $y_1(x) - y_2(x) = |\,y_1(x)\,| + |\,y_2(x)\,|$].



113. ábra

A (belső) falfelület $[0, x]$ szakasz menti részére ható *nyomóerő differenciálja* pedig az $[x, x+dx]$ szakaszon — ez utóbbin állandó $p(x) = p_0 + \gamma x$ nyomást tételezve fel — így alakul:

$$dP(x) = dT(x)(p_0 + \gamma x) =$$
$$[y_1(x) - y_2(x)]\,(p_0 + \gamma x)\,dx,$$

vagyis az x helyen vett területdifferenciál és a nyomás szorzata; itt p_0 a folyadék felszínén uralkodó nyomás, γ a folyadék fajsúlya. *A falfelület ábrázolt $[a, b]$ szakasz menti darabjára ható nyomóerő tehát:*

$$P(a, b) = \int_a^b [y_1(x) - y_2(x)](p_0 + \gamma x)\,dx,$$

az egész falfelületre pedig:

$$P = P(0, h) = \int_0^h [y_1(x) - y_2(x)](p_0 + \gamma x)\,dx.$$

A p_0 nyomás rendszerint (mint *légköri* nyomás) a fal külső felületére is hat. Ezt feltételezve alábbi képleteinkben csak a folyadéknyomással számolunk:

$$P(a, b) = \gamma \int_a^b [y_1(x) - y_2(x)]x\, dx,$$

illetve

$$P = P(0, h) = \gamma \int_0^h [y_1(x) - y_2(x)]x\, dx.$$

A képlet nyilván

$$P = \gamma \int_0^h x\, dT(x) = \gamma M_y = \gamma x_s T$$

alakba is írható, ahol T a szóban forgó falfelület területe, x_s pedig a vízszintestől számított függőleges súlyponti koordinátája. Eszerint *az eredő nyomóerő arányos a nedvesített síkrésznek a (vízszintbeli) y tengelyre vonatkozó elsőrendű nyomatékával.*

Ha az $y_1(x)$ és $y_2(x)$ görbe az x tengelyre *szimmetrikus*, akkor $y_1(x) - y_2(x) = 2y_1(x)$, és megfelelően:

$$P = 2\gamma \int_0^h y_1(x)x\, dx.$$

*Az eredő nyomóerő támadáspontjának, az ún. nyomásközéppont*nak koordinátáit a párhuzamos megoszló terhelés (nyomáseloszlás) *statikai nyomatékai útján* számítjuk ki. (L. 7. § f. α).) Ezek:

$$N_x = \int_0^h \frac{y_1(x) + y_2(x)}{2}\, dP(x) = \frac{\gamma}{2} \int_0^h [y_1^2(x) - y_2^2(x)]x\, dx,$$

$$N_y = \int_0^h x\, dP(x) = \gamma \int_0^h [y_1(x) - y_2(x)]x^2\, dx.$$

A (statikai) nyomatéki tétel értelmében *a keresett koordináták:*

$$\xi = \frac{N_y}{P}, \qquad \eta = \frac{N_x}{P}.$$

Ha az $y_1(x)$ és $y_2(x)$ görbe *szimmetrikus* az x tengelyre [azaz $-y_1(x) = +y_2(x)$], akkor nyilvánvalóan:

$$\xi = \frac{N_y}{P} = \frac{\int_0^h y_1(x)x^2\, dx}{\int_0^h y_1(x)x\, dx}, \qquad \eta = 0,$$

vagyis ilyen esetben *a nyomásközéppont az x tengelyre* (szimmetriatengelyre) *esik* (mert láthatóan $N_x = \gamma I_{xy} = 0$).

Az előbbi képletek *más alakban:*

$$N_x = \gamma \int_0^h \frac{y_1(x) + y_2(x)}{2} x \, dT(x) = \gamma \int_0^h x y_k(x) \, dT(x) = \gamma I_{xy},$$

$$N_y = \gamma \int_0^k x^2 \, dT(x) = \gamma I_y,$$

továbbá:

$$\xi = \frac{I_y}{M_y}, \qquad \eta = \frac{I_{xy}}{M_y},$$

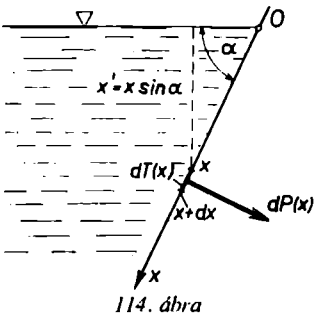
Eszerint *a nyomásközéppont koordinátáit a nedvesített síkrész másod- és elsőrendű nyomatékainak említett hányadosai határozzák meg.*

Látható tehát, hogy a folyadék nyomóerejének számítása *szoros kapcsolatban* van az első- és másodrendű nyomaték számításával!

β) Ferde sík falra

A derékszögű *koordináta-rendszert* e ferde fal (belső, nedves) síkjában vesszük fel, az előbbi módon. A nedvesített falfelület határgörbéi is legyenek az előbbiek (114. ábra). A *területdifferenciál* most is:

$$dT(x) = [y_1(x) - y_2(x)] \, dx,$$



114. ábra

viszont a *nyomáseloszlás* (csak a folyadéknyomással számolva):

$$p(x) = \gamma x \sin \alpha.$$

Ennélfogva *képleteink így alakulnak:*

$$P_\alpha = \gamma \sin \alpha \int_0^h [y_1(x) - y_2(x)] x \, dx =$$

$$= \gamma \sin \alpha \int_0^h x \, dT = \gamma M_y \sin \alpha = P \sin \alpha,$$

$$N_{x\alpha} = \frac{\gamma \sin \alpha}{2} \int_0^h [y_1^2(x) - y_2^2(x)] x \, dx = \gamma \sin \alpha \int_0^h y_k(x) x \, dT(x) = \gamma I_{xy} \sin \alpha,$$

$$N_{y\alpha} = \gamma \sin \alpha \int_0^h [y_1(x) - y_2(x)] x^2 \, dx = \gamma \sin \alpha \int_0^h x^2 \, dT = \gamma I_y \sin \alpha,$$

végül változatlanul (a fal mentén mérve):*

$$\xi = \frac{I_y}{M_y}, \qquad \eta = \frac{I_{xy}}{M_y}.$$

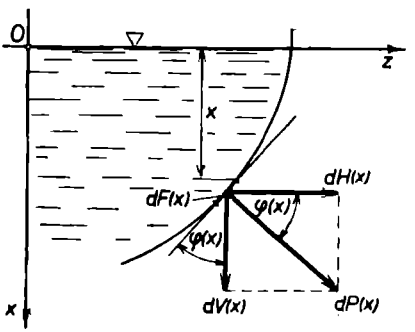
Az említett *szimmetria* esetén $I_{xy} = 0$ és vele $\eta = 0$.

Ha tehát a függélyes falat (a rárajzolt koordináta-rendszerrel együtt, az y tengely körül) α-szöggel elforgatjuk, nem változik rajta az eredő nyomóerő támadópontja, míg nagysága sin α*-szorosára csökken.*

γ) Görbe falra

γ₁) Speciális esetekben egyszeres integrállal számítható a nyomóerő és a nyomásközéppont.**

A görbe felület egy, a folyadékszint alatt x *mélységben levő* dF *elemére, reá merőleges irányban* (a p_0-tól eltekintve) $dP(x) = \gamma x\, dF(x)$ *erő hat* (115. ábra).



115. ábra

Vízszintes és függőleges komponense [a $dP(x)$ szögét a z tengelyiránytól mérve]:***

$$dH(x) = \gamma x\, dF(x) \cos \varphi(x) = \gamma x\, dF_x(x),$$
$$dV(x) = -\gamma x\, dF(x) \sin \varphi(x) = -\gamma x\, dF_y(x),$$

mert $\varphi(x) < 0$ (az óramutató járásával egyértelmű elfordulás) esetén $dV(x) > 0$ (lefelé mutató); továbbá a $dP(x)$ erő *iránya:*

$$\operatorname{tg} \varphi(x) = -\frac{dV(x)}{dH(x)}.$$

Ezzel előállítottuk a nyomóerőnek és összetevőinek differenciálját.

Eszerint *a görbe felület elemére ható nyomóerő vízszintes, illetve függőleges összetevője egyenlő az ott uralkodó nyomásnak, valamint a felületelem függőleges, illetve vízszintes vetületének szorzatával.* A vetületek előjelesen értendők.

A nyomásközéppont megállapítása ismét a (statikai) nyomatéki tétel alapján történik. E nyomatékok differenciáljai:

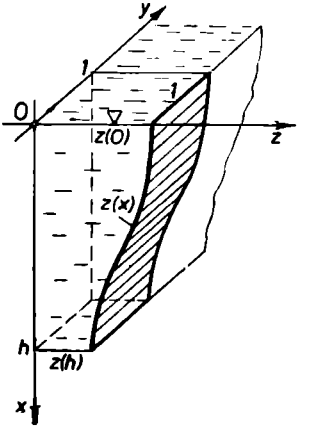
$$dN_z(x) = dH(x)x = \gamma x^2\, dF(x) \cos \varphi(x),$$

illetve:

$$dN_x(x) = dV(x)\, z(x) = -\gamma x z(x) \sin \varphi(x)\, dF(x),$$

ahol $z = z(x)$ az edényfal profil-, illetve meridiángörbéje. (A $dN_y(x)$-re rendszerint nincs szükség, mert a falfelületnek függőleges szimmetriasíkja van.) A nyomatékok az origóra vonatkoznak.

Az említett nyomóerő- és (statikai) nyomatéki differenciálok viszonylag egyszerűen nyerhetők vízszintes tengelyű hengerfelületek, valamint függőleges tengelyű forgásfelületek esetén.



116. ábra

* Függélyes irányban: $\xi' = \xi \sin \alpha$.
** Általános tárgyalása vektoranalitikus úton történik. L. a B. II. kötetben.
*** Itt csak két dimenzióban tárgyalható esetekre gondolunk.

γ_2) *Vízszintes tengelyű, $z=z(x)$ profilgörbéjű hengerfelület egységnyi szélességű darabjára* vonatkozólag írhatjuk:

$$dF(x)=1\cdot ds(x)=\sqrt{1+z'^2(x)}\,dx,$$

$$dF(x)\cos\varphi(x)=\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi(x)}\,dx\cos\varphi(x)=dx,$$

$$dF(x)\sin\varphi(x)=\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi(x)}\,dx\sin\varphi(x)=\operatorname{tg}\varphi(x)\,dx=z'(x)\,dx.$$

Ezekkel *az eredő nyomóerő összetevői:*

$$H_1(0,h)=\gamma\int_0^h x\,dx=\frac{\gamma h^2}{2}=\gamma T_h,$$

ahol T_h a h befogójú egyenlő szárú derékszögű háromszög területe;

$$V_1(0,h)=-\gamma\int_0^h xz'(x)\,dx=-\gamma\Big[xz(x)\Big]_0^h+\gamma\int_0^h z(x)\,dx=$$
$$=\gamma[T_z(0,h)-T_t(0,h)]=\gamma T(0,h),$$

ahol a $T_z(0,h)$ a $z=(x)$ profilgörbe alatti területet jelenti a $[0,h]$ szakaszon, a $T_t(0,h)$ e szakaszra mint alapra rajzolt $z(h)$ magasságú téglalap területét, $T(0,h)$ pedig e két terület előjeles különbségét (116. ábra). Látható, hogy $T_t(0,h)>T_z(0,h)$ esetén $V_1(0,h)<0$, vagyis felfelé mutat az eredő nyomóerő vertikális komponense. Célszerű a koordináta-rendszert úgy felvenni, hogy $z(h)=0$, s vele együtt $T_t(0,h)=0$, $T_z(0,h)=T(0,h)$ legyen.

Az eredő nyomóerő és iránya tehát:

$$P_1(0,h)=\sqrt{H_1^2(0,h)+V_1^2(0,h)}$$

és

$$\varphi_1=-\operatorname{arctg}\frac{V_1(0,h)}{H_1(0,h)},$$

mely utóbbi szintén z tengelyiránytól mérendő.

A megoszló terhelést képező vízszintes és függőleges komponensek (statikai) *nyomatékai* az origóra vonatkozólag:

$$N_{z,1}(0,h)=\gamma\int_0^h x^2\,dx=\frac{\gamma h^3}{3}=\gamma\frac{h^2}{2}\cdot\frac{2}{3}h=\gamma\frac{2}{3}hT_h=\gamma M_{h,z},$$

ahol $M_{h,z}$ az említett háromszögterület elsőrendű nyomatéka a z tengelyre vonatkozólag;

$$N_{x,1}(0,h)=-\gamma\int_0^h xz'(x)\,z(x)\,dx=-\frac{h\gamma z^2(h)}{2}+\frac{\gamma}{2}\int_0^h z^2(x)\,dx=$$
$$=\gamma[M_{z,x}(0,h)-M_{t,x}(0,h)]=\gamma M_x(0,h),$$

ahol $M_{z,x}(0,h)$, illetve $M_{t,x}(0,h)$ az említett $T_z(0,h)$ görbe alatti, illetve $T_t(0,h)$ téglalapterület elsőrendű nyomatéka, $M_x(0,h)$ pedig a $T(0,h)$ területkülönbségé — mindhárom az x tengelyre vonatkozólag.

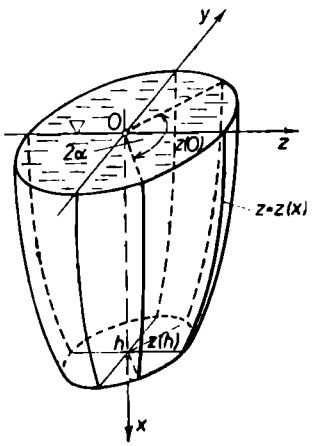
A nyomásközéppont koordinátái tehát, a nyomatéki tétel értelmében:

$$\xi = \frac{N_{z,1}(0,h)}{H_1(0,h)} = \frac{M_{h,z}}{T_h} = \frac{2}{3}h = x_{h,s}$$

és

$$\zeta = \frac{N_{x,1}(0,h)}{V_1(0,h)} = \frac{M_x(0,h)}{T(0,h)} = z_s,$$

vagyis a nyomásközéppont függőleges koordinátája az említett egyenlő szárú derékszögű háromszög területének függőleges súlyponti koordinátájával, vízszintes koordinátája pedig az említett $T(0,h)$ területkülönbség vízszintes súlyponti koordinátájával egyenlő.



117. ábra

γ_3) *Függőleges tengelyű, $z = z(x)$ meridiángörbéjű forgásfelület $d\alpha$ elfordulási szöghöz tartozó darabjára* vonatkozólag írhatjuk (117. ábra):

$$dF(x)\cos\varphi(x) = d\alpha z(x)\frac{\sqrt{1+z'^2(x)}}{\sqrt{1+z'^2(x)}}\,dx = d\alpha z(x)\,dx,$$

$$dF(x) = d\alpha z(x)\,ds(x) = d\alpha z(x)\sqrt{1+z'^2(x)}\,dx.$$

$$dF(x)\sin\varphi(x) = d\alpha z(x)z'(x)\,dx;$$

továbbá:

$$dH(0,h) = d\alpha\gamma\int_0^h xz(x)\,dx = d\alpha\gamma M_{z,z}(0,h),$$

$$dV(0,h) = -d\alpha\gamma\int_0^h xz(x)z'(x)\,dx = d\alpha\gamma\left[-\frac{hz^2(h)}{2}+\frac{1}{2}\int_0^h z^2(x)\,dx\right] =$$

$$= d\alpha\gamma[M_{z,x}(0,h) - M_{t,x}(0,h)] = d\alpha\gamma M_x(0,h),$$

ahol $M_{z,z}(0,h)$ a $z = z(x)$ meridiángörbe alatti terület elsőrendű nyomatéka a z tengelyre vonatkozólag, $M_{z,x}(0,h)$ ugyanez az x tengelyre vonatkozólag, $M_t(0,h)$ pedig a $[0,h]$ szakaszra mint alapra rajzolt, $z(h)$ magasságú téglalapterületnek, végül $M_x(0,h)$ e két terület előjeles különbségének elsőrendű nyomatéka az x tengelyre vonatkozólag. Célszerű a koordináta-rendszert úgy felvenni, hogy $z(h) = 0$ és vele együtt $M_{t,x}(0,h) = 0, M_{z,x}(0,h) = M_x(0,h)$ legyen. A $dH(0,h)$ erők a *vízszintes* síkban sugárirányúak; *eredőjük* a z tengelyre szimmetrikus $[-\alpha, +\alpha]$ szektorban:*

$$H_{2\alpha}(0,h) = \int_{-\alpha}^{+\alpha} dH(0,h)\cos\alpha = \gamma M_{z,z}(0,h)\int_{-\alpha}^{+\alpha}\cos\alpha\,d\alpha = 2\gamma M_{z,z}(0,h)\sin\alpha.$$

* Egyszerűbben tárgyalható vektoranalitikus úton.

A $dV(0, h)$ erők egyformán *függőleges* irányúak, és *eredőjük* az említett szektorban:

$$V_{2\alpha}(0, h) = \int_{-\alpha}^{+\alpha} dV(0, h) = \gamma M_x(0, h) \int_{-\alpha}^{+\alpha} d\alpha = 2\alpha\gamma M_x(0, h).$$

A megoszló terhelést képező z irányú és x irányú erők (statikai) *nyomatékai* az origóra vonatkozólag:

$$N_{2\alpha, z}(0, h) = 2\gamma \sin\alpha \int_0^h x^2 z(x)\, dx = 2\gamma I_{z,z}(0, h) \sin\alpha;$$

$$N_{2\alpha, x}(0, h) = -2\alpha\gamma \int_0^h x z^2(x) z'(x)\, dx = 2\alpha\gamma \left[-\frac{h z^3(h)}{3} + \frac{1}{3} \int_0^h z^3(x)\, dx \right] =$$

$$= 2\alpha\gamma [I_{z,x}(0, h) - I_{t,x}(0, h)] = 2\alpha\gamma I_x(0, h).$$

A nyomásközéppont koordinátái tehát a nyomatéki tétel értelmében:

$$\xi = \frac{N_{2\alpha, z}(0, h)}{H_{2\alpha}(0, h)} = \frac{I_{z,z}(0, h)}{M_{z,z}(0, h)},$$

$$\zeta = \frac{N_{2\alpha, x}(0, h)}{V_{2\alpha}(0, h)} = \frac{I_x(0, h)}{M_x(0, h)},$$

vagyis éppen az említett görbe alatti terület z tengelyre vonatkozó, illetve az említett területkülönbség x tengelyre vonatkozó másodrendű és elsőrendű nyomatékának hányadosai.

γ_4) Egyéb speciális esetet nem részletezünk; ehelyett a példákra utalunk s egy-két megjegyzést teszünk.

Gyakori feladat az edényben levő *folyadék függőleges irányú nyomóerejének, az ún. fenéknyomásnak a vizsgálata.* Ha függőleges tengelyű, *forgásfelület* alakú edényről van szó, akkor a fenéknyomás — a γ_3) értelmében — egyszerűen:

$$V_{2\pi}(0, h) = 2\pi\gamma M_x(0, h).$$

Ha pedig vízszintes tengelyű, $z_1 = z_1(x)$ és $z_2 = z_1(x)$ profilgörbéjű *hengerfelület* alakú az edény, akkor a hosszegységnyi darabjára ható fenéknyomás a γ_2)-vel összhangban:

$$V_1(0, h) = \gamma[T_1(0, h) - T_2(0, h)] = \gamma T(0, h),$$

ahol $T(0, h)$ a $z_1(x)$ és $z_2(x)$ görbéje közti $T_z(0, h) = \int_0^h [z_1(x) - z_2(x)]\, dx$ terület, valamint a $T_t(0, h) = h[z_1(h) - z_2(h)]$ téglalapterület különbségét jelenti.

Előfordul továbbá, hogy *meg kell határozni valamely* (sík vagy görbe) *faldarabra ható adott irányú erőt, az ún. iránynyomást.* Ha x mélységben a $dF(x)$ felületelemre ható és erre merőleges $\gamma x\, dF(x)$ nyomóerő és az adott irány $\beta(x)$ hajlásszögű, akkor a keresett K erő differenciálja, a γ_1)-gyel összhangban:

$$dK(x) = \gamma x\, dF(x) \cos\beta(x) = \gamma x\, dF_\beta(x),$$

vagyis az x *mélységben uralkodó nyomás szorozva a felületelemnek az adott irányra merőleges vetületével.* Ezt integrálva, miközben $0 \leqq x \leqq h$, nyerjük a keresett $K(0, h)$ erőt. Természetesen, ha ismeretes az illető faldarabra ható eredő $P(0, h)$ nyomóerő nagyság és irány szerint, akkor egyszerűen:

$$K(0, h) = P(0, h) \cos \beta,$$

ahol β a két irány hajlásszöge.

A fentebbiek alapján könnyen belátható, hogy *a vízszintes iránynyomás tetszőleges alakú, folyadékba merülő testre* 0.* Ugyanis az $[x, x+dx]$ elenyésző vastagságú vízszintes rétegben a testre ható, pl. z tengely irányú erő, lévén $dF(y) \cos \beta(y) = ds \cos \beta(y)\, dx = dy\, dx$:

$$dK_z(x) = \gamma x\, dx \left[\int_{y_a}^{y_f} dy - \int_{y_a}^{y_f} dy \right] = 0,$$

ahol y_f és y_a az y legnagyobb és legkisebb értéke e rétegben (118. ábra).

δ) Archimedes törvénye

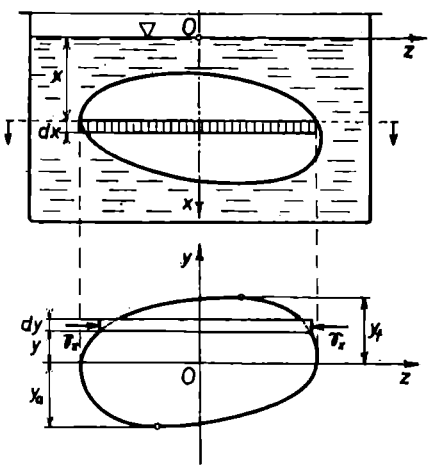
δ_1) Felhajtóerő.** Határozzuk meg most a *folyadékba merülő tetszőleges alakú testre ható függőleges iránynyomást* (119. ábra).

A test egy $[y, y+dy]$ elenyésző vastagságú függőleges *szeletére* ható függőleges erő, lévén $dF(z) \cos \beta(z) = dy\, ds \cos \beta(z) = dy\, dz$:

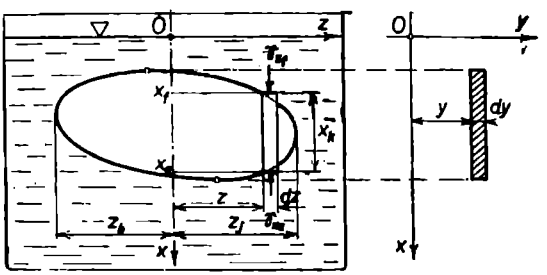
$$dK(y) = dy\, \gamma \int_{z_b}^{z_f} [x_f(z) - x_a(z)]\, dz = -dy\, \gamma \int_{z_b}^{z_f} x_k(z)\, dz = dy\, \gamma T(y) = -\gamma\, dV(y),$$

s ennek megfelelően a *teljes testre* ható függőleges erő:

$$K = -\gamma \int_0^V dV = -\gamma V = -G_f.$$



118. ábra



119. ábra

* L. *Kövesi* i. m. 39. o.
** L. *Kövesi* i. m. 39. o.

Eredményünk *Archimedes* híres *törvényét* adja; eszerint *a folyadékba merülő testre a kiszorított folyadék* ($G_f = \gamma V$) *súlyával egyenlő nagyságú felhajtó-* (negatív előjelű) *erő hat.*

Ha a test *csak részben* merül a folyadékba, akkor

$$dK(y) = dy\gamma \int_{z_b}^{z_f} [p_0\, dz - (p_0 + x_a\gamma)\, dz] =$$

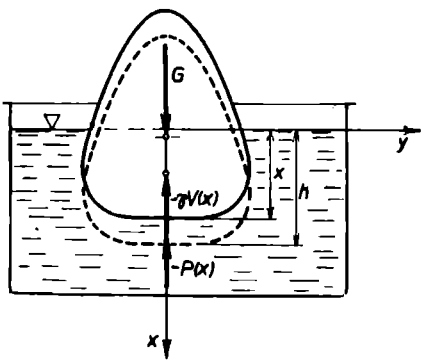
$$= -dx\gamma \int_{z_b}^{z_f} x_a(z)\, dz = -\gamma\, dV_a(y), \qquad K = -\gamma V_a$$

úton jutunk hasonló értelmű eredményhez.

A folyadék felhajtó erejének meghatározása tehát *térfogatszámítást* igényel.

Szokás számítani *a h mélységig vízbe merülő test teljes kiemeléséhez szükséges munkát.* Ez — tekintettel a kiemelés közben változó $K(x)$ felhajtóerőre és a $-P(x) < 0$ (felfelé mutató) körülményre — így alakul (120. ábra):

$$L = \int_h^0 [-P(x)]\, dx = \int_0^h P(x)\, dx = \int_0^h [G - \gamma V(x)]\, dx.$$



120. ábra

δ_2) Úszó testek egyensúlya.* *A vízbe merülő testre két függőleges erő hat:* az egész test S súlypontjában támadó G *súlyerő* és a kiszorított folyadék C súlypontjában támadó K *felhajtóerő.* A testnek a vízben való lebegéséről vagy a víz színén való úszásáról nyilván csak akkor lehet szó, ha $G \leqq K$; (*a* $G > K$ esetben a test lesüllyed).

Legyen a vízbe merülő test homogén, azaz $\gamma_t = \text{const}$. Akkor az említett $G = K$ egyenlőség *lebegés* esetén azt kívánja, hogy $\gamma = \gamma_t$ legyen. *Úszás* esetén viszont:

$$\gamma_t < \gamma \quad \text{és} \quad G = V\gamma_t = K = V_a\gamma,$$

$$\text{azaz} \quad \frac{V_a}{V} = \frac{\gamma_t}{\gamma}, \quad \text{vagy} \quad \frac{V - V_a}{V} = \frac{\gamma - \gamma_t}{\gamma};$$

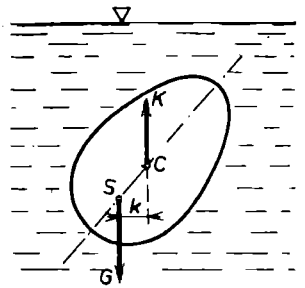
A G és K *egyenlősége még nem elegendő a test egyensúlyához.* A két súlypont, az S és C ugyanis általában nem esik egybe (lebegés esetén is csak akkor, ha a test homogén). A (nem egy pontba és nem egy függőlegesbe eső) S és C pontban támadó G és K, e két egyenlő nagyságú, de ellenkező irányú függőleges erő $M = Gk$ nyomatékú *erőpárt* alkot (121. ábra); forgató hatása olyan, hogy a G-t és K-t közös függőleges hatásvonalba törekszik fordítani, miközben $M \to 0$, mert $k \to 0$. *Az* $M = k = 0$ *helyzetben áll be az egyensúly.*

Az egyensúly stabilis, közömbös, illetve labilis, attól függően, hogy közös függőlegesben az S a C alá, a C-vel egybe, illetve a C fölé esik-e.

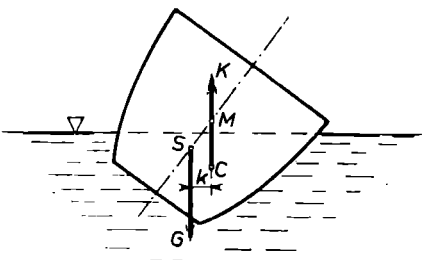
Az úszó test (pl. hajó) rendszerint nincs egyensúlyi helyzetben; külső hatások (pl. hullámzás, szél) az egyensúlyban függőleges szimmetriavonalát (mely ekkor egyszersmind a G és K közös hatásvonala) többé-kevésbé elforgatják. Közben a vízbe merülő testrész alakjával együtt változik

* L. *Kövesi* i. m. 41. o.

a kiszorított folyadék C súlypontja s vele együtt *a K felhajtóerő függőlegese*. Ez utóbbi *a középvonalat az M pontban, az ún. metacentrumban metszi* (122. ábra). *Az úszást* attól függően nevezzük *stabilisnak, labilisnak, illetve közömbös*nek, hogy ezen M metacentrum szintje az S súlyponté fölött, alatt van-e, illetve M és S összeesik-e. Az elforgatással egyidejűleg fellépő $M=Gk$ nyomatékú erőpár a stabilisan, illetve labilisan úszó testet a stabilis egyensúlyi helyzetbe visszaforgatni, illetve leforgatni törekszik. Az úszás e kérdései *a hajózásban* nagy szerepet játszanak.*



121. ábra



122. ábra

*A lebegés kérdéseinek a léghajózásban** *van jelentős szerepe.* Itt a felhajtó közeg a felfelé csökkenő fajsúlyú levegő. Egyre növekvő magasságban tehát csak a (laza) ballon térfogatának növelése vagy a (feszes) ballon súlyának csökkentése útján lehet lebegni.

Példák és feladatok

α—β | **1.** Meghatározandó a γ fajsúlyú folyadék nyomóereje és nyomásközéppontja az edény függőleges, *derékszögű négyszög alakú falán*, ha ennek függőleges éle a, vízszintes éle b, s az utóbbi éppen a vízszintbe esik.

Jelen esetben, a szimmetria miatt:

$$y_1(x) - y_2(x) = 2y_1(x) = b \quad \text{és} \quad 0 \leqq x \leqq b.$$

Ennélfogva a keresett *nyomóerő:*

$$P = 2\gamma \int_0^b y_1(x)x\,dx = \gamma b \int_0^a x\,dx = \frac{\gamma a^2 b}{2} = \gamma ab\,\frac{a}{2} = \gamma M_y.$$

A *nyomásközéppont* koordinátái pedig:

$$\eta = 0, \quad \text{mert} \quad y_1(x) = -y_2(x) = \frac{b}{2};$$

$$\xi = \frac{N_y}{P} = \frac{2}{P}\gamma \int_0^b y_1(x)x^2\,dx = \frac{2\gamma b}{\gamma a^2 b} \int_0^a x^2\,dx = \frac{2}{a^2} \cdot \frac{a^3}{3} = \frac{2}{3}a.$$

*Ellenőrzés*képpen:

$$\eta = \frac{I_{xy}}{M_y} = \frac{0}{\frac{a^2 b}{2}} = 0.$$

* L. *Grüber—Blahó* i. m. 22. és 25. o.

$$\xi = \frac{I_y}{M_y} = \frac{\frac{ba^3}{3}}{\frac{a^2 b}{2}} = \frac{2}{3}a.$$

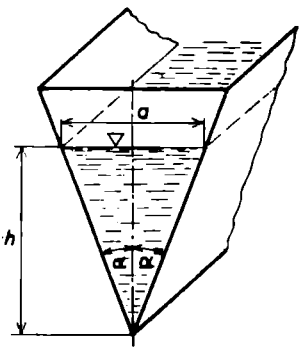
2. Végezzünk hasonló számítást egy függőleges (egyenlő szárú) *háromszög alakú falra*, ha ennek a vízszintbe eső alapja a, magassága h, szimmetriatengelye függélyes, csúcsa lent van (123. ábra).

Most:

$$y_1(x) = \frac{a}{2}\left(1 - \frac{x}{h}\right) = -y_2(x),$$

azaz

$$y_1(x) - y_2(x) = 2y_1(x) = a\left(1 - \frac{x}{h}\right).$$



123. ábra

A *nyomóerő* tehát:

$$P = \gamma a \int_0^h \left(1 - \frac{x}{h}\right) x\, dx = \gamma a \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3h}\right]_0^h = \frac{\gamma a h^2}{6} =$$

$$= \gamma \frac{h^3}{3} \operatorname{tg} \alpha = \gamma \frac{ah}{2} \cdot \frac{h}{3} = \gamma M_y.$$

A *nyomásközéppont* (szimmetriaokok miatt):

$$\eta = 0, \qquad \xi = \frac{2\gamma}{P} \int_0^h y_1(x) x^2\, dx =$$

$$= \frac{6}{h^2} \int_0^h \left(1 - \frac{x}{h}\right) x^2\, dx = \frac{6}{h^2}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4h}\right]_0^h = \frac{h}{2}.$$

Ellenőrzés:

$$\eta = \frac{I_{xy}}{M_y} = 0, \qquad \xi = \frac{I_y}{M_y} = \frac{\frac{ah^3}{12}}{\frac{ah^2}{6}} = \frac{h}{2}.$$

3. Ismételjük meg az 1. példabeli számítást hasonló alakú és méretű, de a víztükörhöz képest $\alpha = 30°$ hajlásszögű *ferde falra!*

Ekkor — mint a képletek összehasonlítása útján megállapítható — a P *erő* a függőleges falra számítottnak $\sin\alpha$-szorosa, azaz:

$$P_\alpha = P \sin \alpha = \frac{\gamma a^2 b}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\gamma a^2 b}{4}.$$

A *nyomásközéppont* koordinátái változatlanok (a fal mentén mérve):

$$\eta = 0. \qquad \xi = \frac{2}{3}a.$$

Most azonban a nyomásközéppont a ferde falon csupán

$$\xi' = \xi \sin \alpha = \frac{2}{3} a \cdot \frac{1}{2} = \frac{a}{3}$$

mélységben van a vízszint alatt.

4. Ismételjük meg a 2. példabeli számítást hasonló alakú és méretű, de a víztükörhöz képest $\alpha = 60°$ hajlásszögű *ferde falra.*

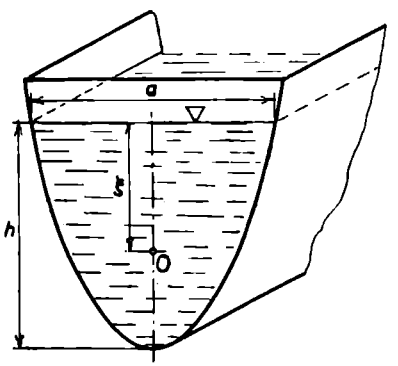
Jelen esetben, a 3. példa mintájára:

$$P_\alpha = P \sin \alpha = \frac{\gamma a h^2}{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{12} \gamma a h^2;$$

$$\eta = 0, \qquad \xi = \frac{h}{2}, \qquad \xi' = \xi \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4} h.$$

5. Meghatározandó a víz nyomóereje és nyomásközéppontja egy *parabola* által határolt függőleges falra; a parabola méretei (124. ábra): $a = 6{,}8$ m; $h = 10$ m. Az a él a vízszintbe esik.

A parabola egyenlete az $\alpha\beta$-beli koordináta-rendszerben:



124. ábra

$$y_1(x) = -y_2(x) = \frac{a}{2} \sqrt{1 - \frac{x}{h}}.$$

A *nyomóerő* tehát (parciális integrálással):

$$P = 2\gamma \int_0^h y_1(x) x \, dx = a\gamma \int_0^h x \sqrt{1 - \frac{x}{h}} \, dx =$$

$$= a\gamma \left[-\frac{2}{3} hx \left(1 - \frac{x}{h}\right)^{5/2} - \frac{4}{15} h^2 \left(1 - \frac{x}{h}\right)^{5/2} \right]_0^h =$$

$$= \frac{4}{15} \gamma a h^2.$$

A fenti számadatok mellett:

$$P = \frac{4}{15} 1000 \cdot 6{,}8 \cdot 10^2 = 1{,}813 \cdot 10^5 \text{ kg} = 181{,}3 \text{ t}.$$

A *nyomásközéppont* (ismételt parciális integrálással):

$$\xi = \frac{N_y}{P} = \frac{2\gamma}{P} \int_0^h y_1(x) x^2 \, dx = \frac{15}{4h^2} \int_0^h x^2 \sqrt{1 - \frac{x}{h}} \, dx =$$

$$= \frac{15}{4h^2} \left[-\frac{2}{3} hx \left(1 - \frac{x}{h}\right)^{3/2} - \frac{8}{15} h^2 x \left(1 - \frac{x}{h}\right)^{5/2} - \frac{16}{105} h \left(1 - \frac{x}{h}\right)^{7/2} \right]_0^h =$$

$$= \frac{15}{4h^2} \frac{16}{105} h^3 = \frac{4}{7} h.$$

A fenti számadatok mellett:

$$\xi = \frac{4}{7} \cdot 10 = 5{,}71 \text{ m}.$$

6. Hogyan módosul a nyomóerő és a nyomásközéppont (mélysége), ha az előbbi *parabolikus falat* a éle körül *elforgatjuk* 30°-kal?

A β) szerint a *nyomóerő* (lévén $\alpha = 60°$):

$$P_x = P \sin \alpha = \frac{4}{15} \gamma a h^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{15} \gamma a h^2;$$

a *nyomásközéppont* pedig (a ferde falon mérve) változatlanul:

$$\xi = \frac{4}{7} h,$$

mélysége a vízszint alatt:

$$\xi' = \xi \sin \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{7} h.$$

7. Hogyan módosul a nyomóerő és a nyomásközéppont, ha az 5. példában említett *parabolát megfordítjuk* úgy, hogy a tengelypontja a vízszinten, az a él pedig h mélységben legyen?

Ekkor a parabola egyenlete:

$$y_1(x) = -y_2(x) = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{x}{h}}.$$

Ekkor a *nyomóerő*:

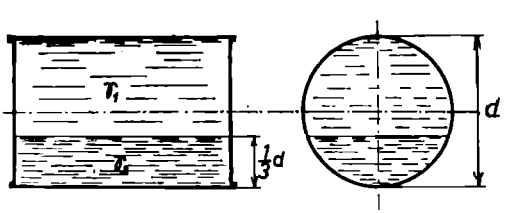
$$P = 2\gamma \int_0^h y_1(x) x \, dx = \frac{a\gamma}{\sqrt{h}} \int_0^h x^{3/2} \, dx = \frac{2}{5} \gamma a h^2 = \frac{6}{15} \gamma a h^2 > \frac{4}{15} \gamma a h^2,$$

mely utóbbit az 5. példában nyertünk.

A *nyomásközéppont*:

$$\xi = \frac{N_y}{P} = \frac{2\gamma}{P} \int_0^h y_1(x) x^2 \, dx = \frac{5}{2h^{5/2}} \int_0^h x^{5/2} \, dx = \frac{5}{7} h > \frac{4}{7} h.$$

8. Vízszintesen elhelyezett *körhenger alakú hordóban két*, egymással nem elegyedő γ_1 és γ_2 fajsúlyú ($\gamma_2 > \gamma_1$) *folyadék* van. A súlyosabb a hordót az átmérő $\frac{1}{3}$ részéig tölti meg (125. ábra). Meghatározandó a kör alakú függőleges oldalfalakra ható nyomóerő.



125. ábra

Az α)-ban tanultak értelmében *a felső körszeletre ható erő* (az x_1-et felülről mérve):

$$P_1 = \gamma_1 \int_0^{\frac{4r}{3}} x_1 \, dT_1 = x_1 M_{y,1} = \gamma_1 x_{s,1} T_1,$$

az alsó körszeletre ható erő pedig, tekintve, hogy az elválasztó húr alatt x_2 mélységben $p(x_2) = \gamma_1 \frac{4r}{3} + \gamma_2 x_2$ nyomás uralkodik:

$$P_2 = \int_0^{\frac{2r}{3}} \left(\gamma_1 \frac{4r}{3} + \gamma_2 x_2\right) dT_2 = \gamma_1 \frac{4r}{3} T_2 + \gamma_2 M_{y,2} = \left(\gamma_1 \frac{4r}{3} + \gamma_2 x_{s,2}\right) T_2.$$

A számításhoz felhasználjuk a körszeletnek a húrjával párhuzamos átmérőjére (η) vonatkozó *statikai nyomatékát*; $\xi^2 + \eta^2 = r^2$ egyenletű kör esetén (126. ábra):

$$M_\eta = \int_b^0 2\eta \, d\xi(\eta) \, \xi(\eta) = 2 \int_b^0 \eta \sqrt{r^2 - \eta^2} \frac{-\eta}{\sqrt{r^2 - \eta^2}} \, d\eta =$$

$$= +2 \int_0^b \eta^2 \, d\eta = \frac{2b^3}{3}; \qquad \xi_s = \frac{M_\eta}{T},$$

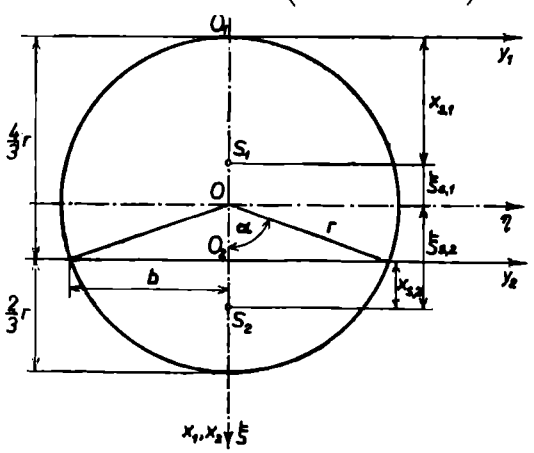
hol b a körszeletet határoló húr fele.

Esetünkben e *félhúr*:

$$b = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} r,$$

a két *körszeletterület* pedig:

$$T_2 = r^2 \left(\arccos \frac{1}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{9}\right) = r^2(1{,}23 - 0{,}32) = 0{,}91 r^2$$



126 ábra

és

$$T_1 = r^2\pi - T_2 = r^2(\pi - 0{,}91) = 2{,}23 r^2.$$

Ezeknek a b húrral párhuzamos átmérőtől (η) számított *súlyponti koordinátái*:

$$\xi_{s,1} = \frac{M_\xi}{T_1} = -\frac{\frac{2b^3}{3}}{T_1} =$$

$$= -\frac{\frac{2}{3}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3} r\right)^3}{2{,}23 r^2} = -0{,}25,$$

és

$$\xi_{s,2}=\frac{M_\xi}{T_2}\quad\frac{\frac{2b^3}{3}}{T_2}=\frac{\frac{2}{3}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}r\right)^3}{0{,}91\,r^2}=$$

$$=0{,}614r,$$

az y_1 és y_2 tengelytől számított súlyponti koordinátái pedig:

$$x_{s,1}=r+\xi_{s,1}=0{,}75r,$$

és

$$x_{s,2}=\xi_{s,2}-\frac{r}{3}=0{,}28r.$$

Ezek felhasználásával *a kérdezett nyomóerők:*

$$P_1=\gamma_1 x_{s,1}T_1=\gamma_1 0{,}75r\cdot 2{,}23r^2=1{,}68\gamma_1 r^3,$$

és

$$P_2=\left(\gamma_1\frac{4r}{3}+\gamma_2 x_{s2}\right)T_2=(1{,}33\gamma_1+0{,}28\gamma_2)\,r\cdot 0{,}91r^2=(1{,}21\gamma_1+0{,}26\gamma_2)r^3;$$

összesen:

$$P=P_1+P_2=(2{,}89\gamma_1+0{,}26\gamma_2)\,r^3.$$

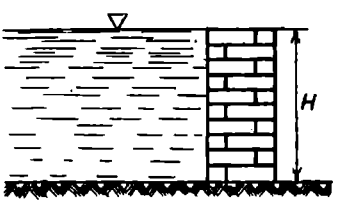
Megjegyzendő, hogy az alábbi *integrálok* — bár körülményesebben — szintén célra vezetnek:

$$P_1=2\gamma_1\int_0^{\frac{4r}{3}}x_1\sqrt{2rx_1-x_1^2}\,dx_1,$$

és

$$P_2=2\int_0^{\frac{2r}{3}}\left(\gamma_1\frac{4r}{3}+\gamma_2 x_2\right)\sqrt{r^2-\left(x_2+\frac{r}{3}\right)^2}\,dx_2.$$

9. Függőleges derékszögű *támasztófal* szélessége 200 m, és $H=10$ m magas vízoszlop nyomását tartja. Meghatározandó a nyomóerő és statikai nyomatéka, mellyel a falat eldönteni törekszik (127. ábra).



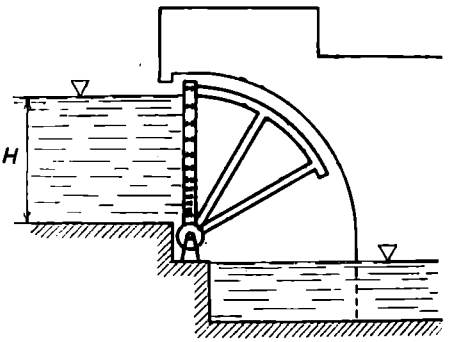
127. ábra

10. *Derékszögű edény*t azonos térfogatú *vízzel* és *olajjal* töltünk meg. Az olaj kétszer könnyebb a víznél. Mutassuk ki, hogy az edény bármelyik oldalára ható erő ötödrészére csökken, ha a keverék helyett tiszta olajat használunk. (Vegyük figyelembe, hogy az olaj felül fog elhelyezkedni!)

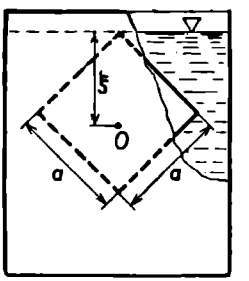
11. Egy *akvárium* oldalfala négyszög alakú és méretei: hossza $a=60$ cm, magassága $b=25$ cm. Osszuk egy vízszintes egyenessel két részre az akvárium említett oldallapját úgy, hogy e részekre ható két erő megegyezzék.

12. A 128. ábrán látható *zsilipkapu*, amelynek magassága $H = 10$ m és szélessége 20 m, a felső csatorna felől nyomásnak van alávetve. Két sík fal között nyolc egyenlő keresztmetszetű kettősresetesz van elhelyezve.

Meghatározandó a *reteszek* célszerű elosztása a magasság mentén, az egyenlő terhelés feltételéből kiindulva, valamint megkeresendő az egyes gerendákra ható nyomóerő.



128. ábra



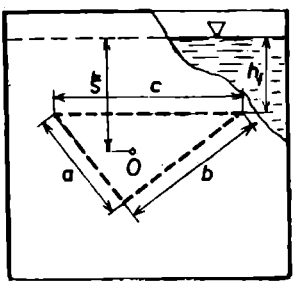
129. ábra

13. Egyenlő szárú *háromszög alakú lemez*t merítsünk függőlegesen vízbe úgy, hogy az alapja a víz felszínén helyezkedjék el. A lemez alapja a, magassága h. A 2. példa alapján ismeretes a víz nyomóereje a lemez bármelyik oldalára. Hányszorosára növekszik az erő, ha a lemezt a csúcsával felfelé fordítjuk, úgyhogy alapja párhuzamos legyen a víz felszínével.

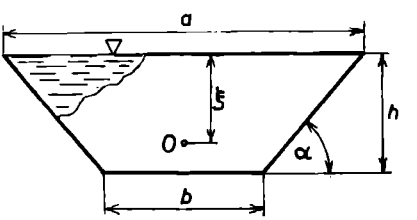
14. Egy $a = 8$ m oldalú *négyzet alakú lemez*t merítsünk függőlegesen vízbe úgy, hogy egyik csúcsa a víz felszínén legyen, és egyik átlója párhuzamos legyen a víz felszínével? Mekkora erővel nyomja a víz a lemez oldalait? (129. ábra.)

15. Meghatározandó a víz nyomóereje egy függőleges síkú *háromszög alakú* faldarabra, amelynek méretei a következők: $a = 3$ m, $b = 4$ m, $c = 5$ m, $h_f = 2$ m (130. ábra).

16. Meghatározandó a nyomóerő és támadópontjának ξ koordinátája a következő méretekkel rendelkező *trapéz alakú* függőleges sík falon: $h = 18$ m, $b = 40$ m, $\alpha = 45°$; a folyadék fajsúlya $\gamma = 1000$ kg/m^3 (131. ábra).



130. ábra



131. ábra

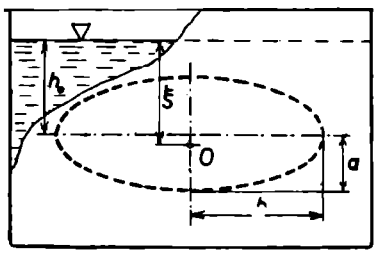
17. Meghatározandó a nyomóerő és támadáspontjának ξ koordinátája egy *trapéz alakú* sík falon (131. ábra), amelynek méretei: $h = 1{,}8$ m, $b = 26$ m, $a = 32$ m.

18. Meghatározandó a víz nyomóereje egy függőleges *ellipszis alakú* faldarabra, amely nek méretei a következők: $a = 3$ m, $b = 7$ m, $h_0 = 5$ m (132. ábra).

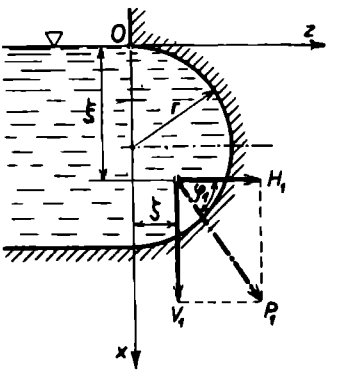
19. *Ellipszis alakú* lemezt függőlegesen folyadékba merítünk úgy, hogy egyik tengelye ($2b$ hosszúságú) a folyadék felszínére esik. Mekkora nyomóerő hat a lemez bármelyik oldalára, ha az ellipszis lemerített féltengelye a és a folyadék fajsúlya γ?

γ | **1.** Meghatározandó a vízszintes tengelyű, *félkör vezérgörbéjű hengeres fal* egységnyi szélességű darabjára ható folyadéknyomás eredője, mégpedig az eredő nyomóerő komponensei és támadópontjának koordinátái.

A henger legfelső alkotója éppen a vízszintben legyen! (133. ábra.)



132. ábra



133. ábra

Esetünkben:

$$z = z(x) = \sqrt{2xr - x^2} \quad [\text{mert } (x-r)^2 + z^2 = r^2], \quad \text{és} \quad 0 \leqq x \leqq 2r.$$

Az eredő nyomóerő vízszintes komponense, a megadott képlet szerint:

$$H_1 = \frac{\gamma h^2}{2} = 2\gamma r^2.$$

Függőleges komponense pedig, a $z(h) = z(2r) = \sqrt{2 \cdot 2r \cdot r - 4r^2} = 0$ körülmény figyelembevételével:

$$V_1 = \gamma T_z(0, h) = \gamma T_z(0, 2r) = \gamma \frac{r^2\pi}{2} = G_1,$$

vagyis megegyezik a félhengerbeli *víz súlyával*.

Az eredő nyomóerő hajlásszöge a vízszinteshez képest:

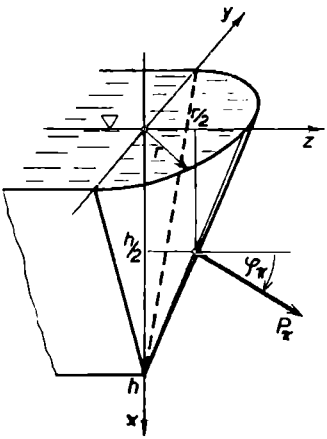
$$\varphi_1 = -\operatorname{arctg} \frac{V_1}{H_1} = -\operatorname{arctg} \frac{\pi}{2 \cdot 2} = -\operatorname{arctg} \frac{\pi}{3} = \cong -51° 51'.$$

az eredő *abszolút értéke* pedig:

$$P_1 = \sqrt{H_1^2 + V_1^2} = \gamma r^2 \sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + 2^2}.$$

Az eredő *támadópont*jának, a nyomásközéppontnak koordinátái, képleteink szerint:

$$\xi = \frac{2}{3}h = \frac{4}{3}r, \qquad \zeta = z_s = \frac{4r}{3\pi}.$$



134. ábra

2. Határozzuk meg a függőleges tengelyű, *csúcsával lefelé fordított*, r alapkör sugarú, h magasságú *körkúp fél palástfelületére* ható folyadéknyomás eredőjének komponenseit és támadópontjának koordinátáit. A kúp alapköre éppen a vízszintbe essék! (134. ábra.)

Jelen esetben, fél forgásfelületről lévén szó, $2\alpha = \pi$, $\sin\alpha = 1$. Továbbá $z = z(x) = r\left(1 - \frac{x}{h}\right)$. *Az eredő nyomóerő komponensei* tehát, a megadott képlet szerint:

$$H_\pi = 2\gamma \int_0^h xz(x)\,dx = 2\gamma r \int_0^h x\left(1 - \frac{x}{h}\right) dx =$$

$$= 2\gamma r\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3h}\right]_0^h = 2\gamma r\,\frac{h^2}{6} = 2\gamma\,\frac{rh}{2}\cdot\frac{h}{3} = 2\gamma M_z\,,$$

illetve

$$V_\pi = -\pi\gamma \int_0^h xz(x)z'(x)\,dx = \pi\gamma\,\frac{r^2}{h}\int_0^h x\left(1 - \frac{x}{h}\right)dx =$$

$$= \pi\gamma\,\frac{r^2}{h}\cdot\frac{h^2}{6} = \pi\gamma h\,\frac{r^2}{6} = \pi\gamma\,\frac{rh}{2}\cdot\frac{r}{3} = \pi\gamma M_x = \frac{1}{2}\gamma\,\frac{r^2\pi h}{3} = G_\pi.$$

vagyis megegyezik a félkúpbeli *víz súlyával*. Az eredő nyomóerő *nagysága* és *hajlásszöge* a z tengelyhez képest:

$$P_\pi = \sqrt{H_\pi + V_\pi^2} = \frac{\gamma rh}{6}\sqrt{4h^2 + \pi^2 r^2}.$$

$$\varphi_\pi = -\operatorname{arctg}\frac{V_\pi}{H_\pi} = -\operatorname{arctg}\frac{\pi r}{2h},$$

vagyis az eredő a kúp normálisához képest $\left[\varphi_{\text{norm}} = -\operatorname{arc\,tg}\frac{r}{h}\right]$ a kúp csúcsa felé elhajló irányú.

A *nyomásközéppont* számítása:

$$N_{z,\pi} = 2\gamma I_z = 2\gamma \int_0^h x^2 z(x)\,dx = 2\gamma r \int_0^h x^2\left(1 - \frac{x}{h}\right) dx = 2\gamma\,\frac{rh^3}{12},$$

illetve

$$N_{x,\pi} = \pi\gamma I_x = -\pi\gamma \int_0^h xz'(x)\,z(x)\,dx =$$

$$= \frac{\pi\gamma}{3}\int_0^h z^3(x)\,dx = \frac{\pi\gamma}{3}\,r^3\int_0^h \left(1 - \frac{x}{h}\right)^3 dx =$$

$$= -\frac{\pi\gamma h}{12} r^3 \left[\left(1 - \frac{x}{h}\right)^4 \right]_0^h = \frac{\pi\gamma h r^3}{12} = \pi\gamma \frac{hr^3}{12};$$

és ezekkel:

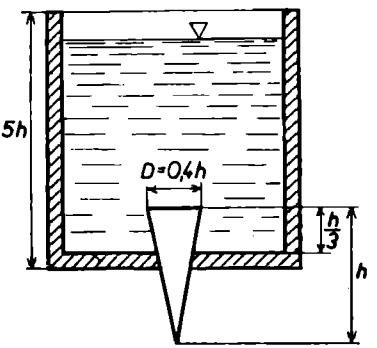
$$\xi = \frac{N_{z,\pi}}{H_\pi} = \frac{\frac{rh^3}{12}}{\frac{rh^2}{6}} = \frac{h}{2},$$

illetve

$$\zeta = \frac{N_{x,\pi}}{V_\pi} = \frac{\frac{hr^3}{12}}{\frac{hr^2}{6}} = \frac{r}{2},$$

vagyis a fél kúppalástfelület középső alkotójának *felezőpontja* a nyomásközéppont.

3. Egy acélból készült $\gamma_a = 7{,}8\ \mathrm{Mp/m^3}$ fajsúlyú *kúp alakú szelep* zárja el a víztartály fenekén levő nyílást. A méreteket l. a 135. ábrán. Meghatározandó a szelep felemeléséhez szükséges erő.



135. ábra

A kúp fedőlapjára függőlegesen lefelé ható *nyomóerő* (γ-val jelölve a víz fajsúlyát):

$$P_1 = \gamma \frac{\pi D^2}{4}\left(5h - \frac{h}{3}\right) = 0{,}585 h^3 \gamma.$$

Ugyancsak lefelé hat a kúp alakú *szelep saját súlya:*

$$G = \frac{D^2\pi}{4}\,\frac{h}{3}\,\gamma = \frac{0{,}4^2\pi}{4 \cdot 3}\,\gamma_a h^3 = 0{,}042\gamma_a h^3.$$

A kúppalástfelület vízzel érintkező részére még — nyilván *felfelé mutató* — *nyomóerő* hat. Számítása a γ_3) szerint történik, figyelembe véve, hogy a kúp fedőlapja most nem a vízszintben van, hanem $h_0 = 5h - \frac{h}{3} = \frac{14}{3}h$ mélységben $p_0 = \gamma_b h_0$ nyomás alatt. Ennélfogva:

$$P_2 = V_{2\pi}\left(0, \frac{h}{3}\right) = +2\pi\gamma \int_0^{h/3} (h_0 + x)\, z(x)\, z'(x)\, dx,$$

és mivel $z(x) = -0{,}2(x - h)$, $z' = -0{,}2$, így:

$$P_2 = +2\pi\, 0{,}2^2\gamma \int_0^{h/3} (h_0 + x)(x - h)\, dx =$$

$$= 2 \cdot 0{,}2^2\pi\gamma \int_0^{h/3} \left(\frac{14}{3}hx + x^2 - \frac{14}{3}h^2 - xh\right) dx =$$

$$=0{,}08\pi\gamma\left[\frac{7}{3}hx^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{14}{3}h^2x-\frac{1}{2}hx^2\right]_0^{h/3}=$$

$$=\frac{0{,}08\pi\gamma}{162}h^3(42+2-252-9)=-0{,}336h^3\gamma \qquad \text{(felfelé mutat).}$$

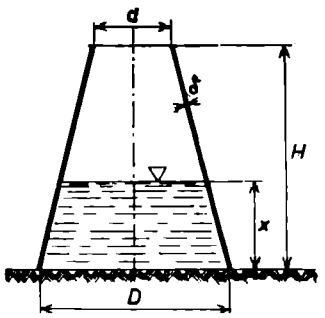
A szelep felemeléséhez szükséges erő tehát, lévén $\gamma_a=7{,}8\gamma$:

$$R=-[P_1+G-P_2]=-\gamma h^3[0{,}585+7{,}8\cdot 0{,}042-0{,}336]=-0{,}576\gamma h^3$$

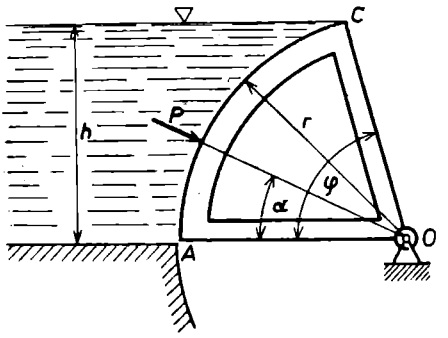
(felfelé mutat).

4. Egy vízszintes felületre állított *fenék nélküli vasedény* csonkakúp alakú, és a következő méretekkel rendelkezik: $D=2$ m, $d=1$ m, $H=4$ m, $\delta=1$ mm, $\gamma_{vas}=7{,}8$ kp/dm^3.

Milyen x vízszintmagasság esetén fog az edény felemelkedni a felületről (136. ábra)?



136. ábra



137. ábra

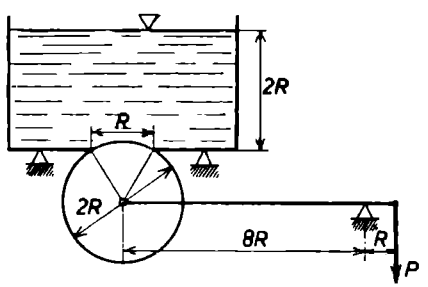
5. Meghatározandó a *körszegmens alakú pajzs*ra ható P nyomóerő és ennek α hajlásszöge a vízszinteshez képest, ha $\varphi=60°$, $h=10$ m, $b=30$ m (137. ábra).

6. Egy tartály fenéknyílását *gömb alakú szelep* zárja el; a tartálynak, valamint az alátámasztó emelő berendezésének méretei a 138. ábrán láthatók.

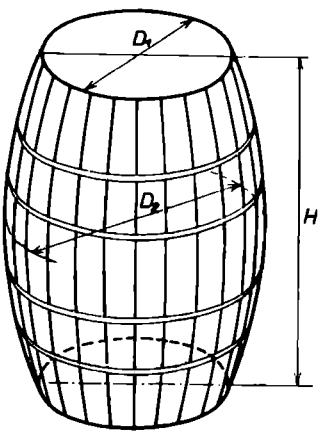
Meghatározandó az a legkisebb P erő, amely a szelep légmentes zárásához szükséges.

7. Négy 2 mm $\times$ 40 mm keresztmetszetű, 200 kg/cm^2 előfeszültségű vasabroncs fogja körül egy *fahordó* dongáit. A hordó méretei: $D_1=600$ mm, $D_2=800$ mm, $H=1300$ mm.

Meghatározandó az abroncsok közepes igénybevétele, ha a hordó $\gamma=850$ kp/m^3 fajsúlyú borral van megtöltve. A dongákat körív alakúnak tekintjük (139. ábra).



138. ábra



139. ábra

δ **1.** A vízben úszik csúcsával lefelé fordítva egy r és h adatokkal jellemzett egyenes *körkúp alakú test*. Fajsúlya $\gamma_0 = \frac{\gamma}{n}$, ahol $n > 1$ és γ a víz fajsúlya. Milyen mélyen merül a test a vízbe? (Az egyensúlyi helyzet stabilitási viszonyait hagyjuk figyelmen kívül.)

Tegyük fel, hogy a kúp x mélységig merül a vízbe. Akkor (140. ábra):

$$\frac{r}{h} = \frac{\varrho}{x} \quad \text{és} \quad \varrho^2\pi = \left(\frac{r}{h}x\right)^2\pi ;$$

továbbá a δ) értelmében a

$$V_a\gamma = \frac{\varrho^2\pi x}{3}\gamma = \gamma\frac{r^2\pi}{3h^2}x^3$$

nagyságú archimedesi *felhajtóerő* az egész test

$$G = \gamma_0 V = \gamma_0\frac{r^2\pi h}{3} = \gamma\frac{r^2\pi h}{3n}$$

*súly*ával tart egyensúlyt. A kettőt egyenlővé téve:

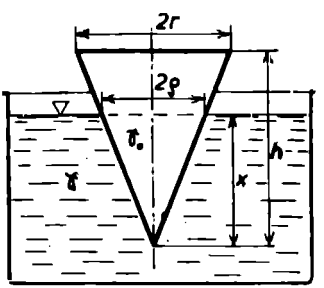
$$V_a\gamma = \gamma\frac{r^2\pi}{3h^2}x^3 = V\gamma_0 = \gamma\frac{r^2\pi h}{3n},$$

ahonnan a keresett *lemerülési mélység*:

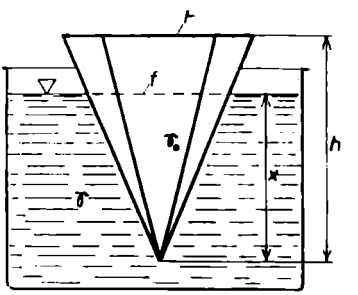
$$x = \frac{h}{\sqrt[3]{n}} = h\sqrt[3]{\frac{\gamma_0}{\gamma}}.$$

2. Hasonló feladat tetszőleges F alapterületű és h magasságú *szabályos gúlára*.

Ekkor x lemerülési mélység esetén (141. ábra):



140. ábra



141. ábra

$$\frac{F}{f(x)} = \frac{h^2}{x^2}, \quad \text{illetve} \quad f(x) = F\frac{x^2}{h^2},$$

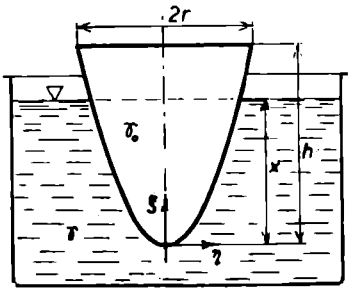
ahol $f(x)$ a gúla keresztmetszete a vízszintben.

Az *egyensúlyi* egyenlet:

$$\frac{f(x)x}{3}\gamma = \frac{Fh}{3}\frac{\gamma}{n},$$

illetve

$$\frac{Fx^3}{3h^2}\gamma = \frac{Fh}{3}\frac{\gamma}{n}.$$



142. ábra

ahonnan ugyanazon

$$x = \frac{h}{\sqrt[3]{n}}$$

eredmény adódik.

3. Állapítsuk meg egy tengelypontjával lefelé fordított, r fedőkör sugarú és h magasságú *forgási paraboloid* lemerülési mélységét az 1. példabeli feltételek mellett.

A paraboloid meridiángörbéjének *egyenlete* (142. ábra):

$$\xi = h\frac{\eta^2}{r^2}.$$

A felhajtóerő és a test súlya valamely x lemerülés esetén *egyensúly*ban van:

$$\gamma V_a = \gamma\pi \int_0^x \eta^2\, d\xi = \gamma \frac{r^2\pi}{h} \int_0^x \xi\, d\xi = \gamma \frac{r^2\pi h}{2} \frac{x^2}{h^2},$$

és

$$G = \gamma_0 V = \frac{\gamma}{n} V = \frac{\gamma}{n}\pi \int_0^h \eta^2\, d\xi = \frac{\gamma}{n} \frac{r^2\pi}{h} \int_0^h \xi\, d\xi =$$

$$= \frac{\gamma}{n} \frac{r^2\pi h}{2}.$$

A kettő egyenlőségéből:

$$\frac{x^2}{h^2} = \frac{1}{n},$$

ahonnan a keresett *lemerülési mélység*:

$$x = \frac{h}{\sqrt{n}} = h\sqrt{\frac{\gamma_0}{\gamma}}.$$

4. Hasonló kérdés tengelypontjával felfelé fordított *forgási paraboloid* alakú test esetén. Ekkor:

$$\xi = h\left(1 - \frac{\eta^2}{r^2}\right), \quad \text{illetve} \quad \eta^2 = \frac{r^2}{h}(h - \xi),$$

és ezzel:

$$\gamma V_a = \gamma\pi \int_0^x \eta^2\, d\xi = \gamma \frac{r^2\pi}{h} \int_0^x (h - \xi)\, d\xi =$$

$$= \gamma \frac{r^2\pi h}{2}\left(\frac{2x}{h} - \frac{x^2}{h^2}\right) = \frac{\gamma}{n} V = \frac{\gamma}{n} \frac{r^2\pi h}{2}.$$

A keresett *lemerülési mélységre* nyerjük:

$$\frac{2x}{h}-\frac{x^2}{h^2}=\frac{1}{n},$$

illetve

$$x^2-2hx+\frac{h^2}{n}=0,$$

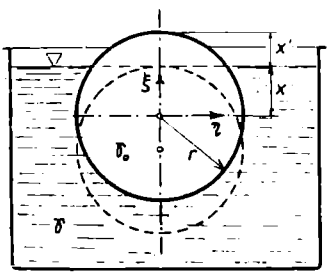
melynek megoldása:

$$x=h\overset{(+)}{-}\sqrt{h^2-\frac{h^2}{n}}=h-h\sqrt{1-\frac{1}{n}}.$$

A vízből kiálló testrész magassága tehát:

$$x'=h-x=h\sqrt{1-\frac{1}{n}}.$$

5. Egy r sugarú és a vízével egyenlő fajsúlyú *gömb* vízbe merül úgy, hogy felül éppen érinti a víz felszínét. Mekkora munkával lehet kiemelni a vízből?



143. ábra

Az adott helyzetben a felhajtó erő és a súlyerő éppen egyensúlyban van. Vizsgáljuk most az erőviszonyokat olyan helyzetben, amikor a gömb $x'=r-x$ magasságú szelete (megfelelő erő hatására) kiemelkedik a vízből (itt az x' a gömb tetőpontjától lefelé, az x pedig a vízszinttel párhuzamos főkörsíktól felfelé mért függőleges ordináta) (l. a 143. ábrát). Ekkor a vízbe merülő *testrész térfogata:*

$$V_a=\pi\int_{-r}^{x}\eta^2\,d\xi=\pi\int_{-r}^{x}(r^2-\xi^2)\,d\xi=$$

$$=\pi\left[r^2(x+r)-\frac{1}{3}(x^3+r^3)\right]=\frac{V}{2}+\pi\left(r^2x-\frac{1}{3}x^3\right),$$

tehát e helyzetben a *súlyerő és a felhajtóerő különbsége* (lefelé, $a-x$ irányába mutató):

$$-P(x)=-G+\gamma V_a=-\gamma(V-V_a)=-\gamma\left[\frac{V}{2}-\pi\left(r^2x-\frac{1}{3}x^2\right)\right].$$

Ezzel egyenlő nagyságú, de felfelé mutató

$$P(x)=+\gamma\left[\frac{V}{2}-\pi\left(r^2x-\frac{1}{3}x^2\right)\right]$$

erő szükséges az említett helyzet fenntartására. Ezen, a kiemelés függvényében változó $P(x)$ erő $[-r, r]$ szakaszon vett integrálja szolgáltatja *a keresett munkát:*

$$L=\int_{-r}^{+r}P(x)\,dx=\gamma\int_{-r}^{+r}\left[\frac{V}{2}-\pi\left(r^2x-\frac{1}{3}x^3\right)\right]dx=$$

$$= \gamma \frac{V}{2} \int_{-r}^{+r} dx - \pi\gamma \int_{-r}^{+r} \left(r^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right) dx =$$

$$= \gamma \frac{V}{2} 2r - 0 = \gamma \frac{4r^3\pi}{3} r = Gr.$$

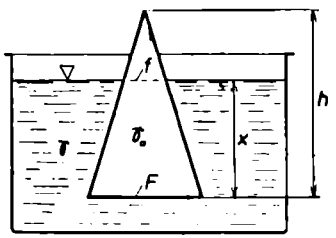
vagyis vízből való kiemeléskor a G súlyú gömb $2r$ mértékű felemeléséhez *ugyanannyi* munka szükséges, mint egyébként (a víz felhajtó erejének segítsége nélkül) r mértékű felemeléséhez.

6. Egy fából készült *kúp* úszik a vízben, a 144. ábrán bemutatott helyzetben. A kúp alaplapjának területe F.

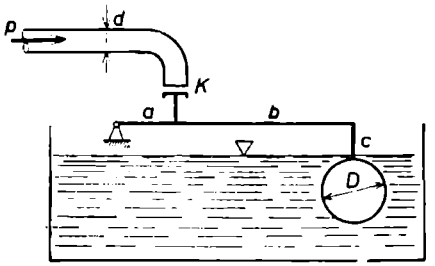
Meghatározandó a lesüllyedés x mértéke, ha a fa fajsúlya $\gamma_0 = 0{,}6$ Mp/m^3.

7. A víz p nyomással igyekszik kinyitni egy d átmérőjű vízvezetékcső *k szelepét*. Ez utóbbi egy vízszintesen elhelyezett *ab* emelő segítségével zárja el a *cső* nyílását.

Az *abc* rudakat, valamint a D átmérőjű gömböt súlytalannak feltételezve, határozzuk meg az emelő a és b karjai közötti viszonyt úgy, hogy a pontos zárás biztosítva legyen (145. ábra).



144. ábra

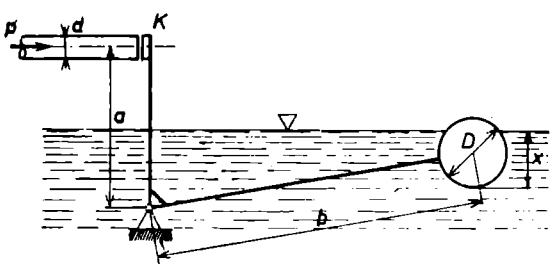


145. ábra

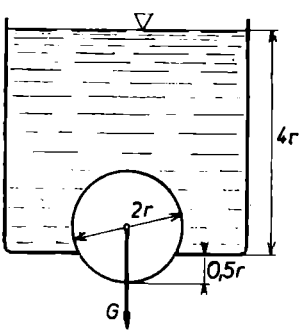
8. Egy $a = 15$ mm átmérőjű *cső* egy tartálynak vízzel való megtöltésére szolgál. A vízzel nyomás a csőben $p = 3$ atm-val egyenlő. A cső vége a k *szeleppel* van lezárva, amely egyenlőtlen $a = 1{,}9$ cm, $b = 40$ cm karú emelőhöz van erősítve. Az emelő másik végére $D = 8$ cm átmérőjű gömb van erősítve (146. ábra).

Meghatározandó az a legnagyobb x mélység, amellyel a gömb a víz színe alá süllyed, ha elhanyagoljuk a gömb, az emelő és a szelep súlyát.

9. Az edény alján levő kör alakú *nyílás* G súlyú golyóval van lezárva (147. ábra). Mekkora erő szükséges a gömb felemeléséhez?



146. ábra



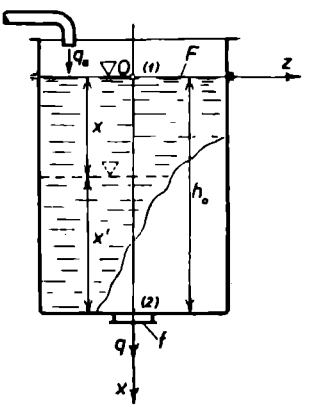
147. ábra

10. Egy *henger alakú*, $F = 4000$ cm^2 keresztmetszetű, $H = 50$ cm magasságú fadarab a víz felszínén úszik. A fa fajsúlya $\gamma = 0{,}8$ g/cm^3. *a)* Mekkora munkát kell végezni ahhoz, hogy kiemeljük a fát a vízből? *b)* Mekkora munkát kell végezni ahhoz, hogy benyomjuk a vízbe?

b) Folyadék kiömlése edény nyílásán

α) Kiömlés vízszintes nyíláson*

α_1 Állandó keresztmetszet és vízszint mellett. Legyen adva valamely *zárt*, tetszőleges vezérgörbéjű *egyenes henger alakú, állandó F keresztmetszetű tartály, vízszintes fenekén f keresztmetszetű nyílással.* Megfelelő q_u utánfolyással** (vagy túlfolyóval) biztosítsunk egyelőre *állandó* h_0 *vízoszlopmagasság*ot. A folyadék feletti (egyelőre) zárt térrészben a *nyomás* legyen p_1, a nyíláson kilépő sugár mentén pedig az atmoszférikus p_0 (148. ábra).



148. ábra

Feltételezve, hogy ideális homogén folyadék örvénymentes (és az állandó vízszint miatt) *stacionárius áramlás*ról van szó, felírhatjuk — célszerűen a vízszint (1) és a fénéknyílás (2) pontjára — a *Bernoulli-egyenlet*et:

$$\frac{v_2^2}{2g} + \xi_2' + \frac{p_2}{\gamma} = \frac{v_1^2}{2g} + \xi' + \frac{p_1}{\gamma},$$

ahol a ξ'-ket a fenéktől mérjük. Figyelembe véve a $\xi_2' = 0$, $\xi_1' = h_0$, $p_2 = p_0$, $v_2 = v$ adatokat és jelöléseket, valamint a *folytonosság* (kontinuitás) $Fv_1 = fv$ egyenletét, írhatjuk:

$$v^2\left(1 - \frac{v_1^2}{v^2}\right) = v^2\left(1 - \frac{f^2}{F^2}\right) = 2g\left(h_0 + \frac{p_1 - p_0}{\gamma}\right),$$

ahonnan a keresett *kiömlési sebesség:*

$$v = \sqrt{\frac{2g\left(h_0 + \frac{p_1 - p_0}{\gamma}\right)}{1 - \frac{f^2}{F^2}}}.$$

Ha a tartály nyitott ($p_1 = p_0$) *és a fénéknyílás* a tartálykeresztmetszethez képest *kicsi* ($f \ll F$), akkor jó közelítéssel:

$$v = \sqrt{2gh_0}.$$

Ez *Torricelli formulája*. Eszerint — az előrebocsátott feltételek mellett — *a kiömlés sebessége a felszín alatt* h_0 *mélységben ugyanakkora, mintha a folyadék a felszínről szabadon esett volna.* Megjegyzendő, hogy *valóságos folyadék esetén* e formula

$$v = \mu\sqrt{2gh_0}$$

* L. *Kövesi* i. m. *Grúber—Blahó* i. m.
** L. az α_2)-t!

alakban használatos, ahol $\mu < 1$ a folyadék viszkozitásától, a nyílás jellegétől, a folyadéksugár kontrakciójától (és a h_0-tól) függő állandó, ún. *kifolyási tényező*. Gyakorlati átlagértéke: $\mu = 0{,}6$.*

Nyitott tartály és kis fenéknyílás esetén, állandó vízszint, tehát stacionárius áramlás *mellett az időegység alatt kiömlő víztérfogat, az ún. vízhozam:*

$$q = vf = f\mu\sqrt{2gh_0},$$

a t idő alatt kiömlő vízmennyiség pedig:

$$Q = qt = f\mu t\sqrt{2gh_0}.$$

A tartályban levő folyadéktérfogat:

$$Q_0 = Fh_0.$$

Ennyi folyadék (állandó vízszint mellett) nyilván

$$T_0 = \frac{Q_0}{q} = \frac{F}{\mu f}\sqrt{\frac{h_0}{2g}}$$

idő alatt távozik a tartályból.

α_2) Állandó keresztmetszet és változó vízszint mellett, utánfolyás nélkül. Ekkor F *továbbra is állandó, de* $q_u = 0$. Az egyszerűség kedvéért dolgozzunk itt (és a továbbiakban mindenütt) *nyitott tartályt* ($p_1 = p_0$) és *kis nyílást* ($f \ll F$) feltételezve, következésképpen h vízoszlopmagasság esetén jó közelítéssel a $v = \sqrt{2gh}$ *Torricelli*-formulát használva.

A vízszint nem állandó, a folyamat nem stacionárius, tehát a Bernoulli-egyenlet nem érvényes többé véges időközben. Állítsuk fel tehát a kiömlés időbeli lefolyását jellemző differenciálegyenletet!

Legyen a t időpontban a lesüllyedt vízszint az eredeti vízszinttől számítva x, a fenéktől számítva x' koordinátájú. (L. a 148. ábrát!) A $[t, t + dt]$ véges időközben *a tartályban* $dx = -dx' > 0$ mértékű *vízszintsüllyedés* és ennek megfelelő $\Delta Q = F\,dx = F\,dx' > 0$ nagyságú *víztérfogatcsökkenés* következik be. A *folytonosság* tétele értelmében *ugyanakkor a nyíláson ezzel egyenlő* ΔQ vízmennyiség ömlik ki. E ΔQ *kiömlésnövekmény* nyilván előállítható

$$\Delta Q = dQ + \alpha = q(x)\,dt + \alpha = \mu f\sqrt{2gx'}\,dt + \alpha = \mu f\sqrt{2g(h_0 - x)}\,dt + \alpha > 0$$

alakban, ahol tehát a dQ kiömlésdifferenciált a t időpontbeli $q(x)$ vízhozam és a dt időnövekmény szorzataként képeztük. Véges dt-re — mint előrebocsátottuk — a $q(x) \neq \text{const.}$ és a $\Delta Q \neq dQ$, azaz $\alpha \neq 0$. Viszont *elenyésző* $dt \approx 0$ (de $\neq 0$) *időnövekményre a* $q(x)$ *állandónak tekinthető, a* ΔQ *pedig a* dQ*-val egyenlőnek vehető*, mert α különbségük a dt-nél magasabbrendűen elenyésző. *Ily módon az időben változó kiömlési folyamat differenciálegyenlete:*

$$F\,dx = q(x)\,dt,$$

illetve részletesebben:

$$F\,dx = \mu f\sqrt{2g(h_0 - x)}\,dt, \quad \text{vagy} \quad -F\,dx' = \mu f\sqrt{2gx'}\,dt;$$

* L.: *Kövesi* i. m. 72. o.

szétválasztás után pedig:

$$dt = \frac{F\,dx}{\mu f\sqrt{2g(h_0 - x)}}, \quad \text{vagy} \quad dt = -\frac{F\,dx'}{\mu f\sqrt{2gx'}}.$$

Végül határozott integrálás útján „összegezzük" a dt ún. időelemeket és a dx, illetve $-dx'$ vastagságú elemi vízrétegekkel kapcsolatos jobb oldali kifejezéseket, *figyelembe véve,* hogy $t = 0$-nál (a kiömlés kezdetén) $x = 0$, illetve $x' = h_0$, míg $t = \tau$-nál (a kiömlés folyamán, egy tetszőleges időpontban) $x = \xi$, illetve $x' = \xi'$ jelöléssel élve. Ezzel:

$$\int_0^\tau dt = \frac{F}{f\mu\sqrt{2g}} \int_0^\xi \frac{dx}{\sqrt{h_0 - x}} = -\frac{F}{f\mu\sqrt{2g}} \int_{h_0}^{\xi'} \frac{dx'}{\sqrt{x'}}.$$

majd az integrálást végrehajtva:

$$\tau = \frac{2F}{f\mu\sqrt{2g}} \left[\sqrt{h_0} - \sqrt{h_0 - \xi}\right] = \frac{2F}{f\mu\sqrt{2g}} \left[\sqrt{h_0} - \sqrt{\xi'}\right].$$

Ezen eredmény egyszersmind *a vízszintsüllyedés időbeli lefolyásáról* is tájékoztat.

A *tartály teljes kiürítési ideje* (lévén $\tau = T$-nél $\xi = h_0$, $\xi' = 0$):

$$T = \frac{2F}{f\mu\sqrt{2g}} \sqrt{h_0} = \frac{2F}{f\mu} \sqrt{\frac{h_0}{2g}}.$$

E kiürítési idő láthatóan éppen *kétszerese* az állandó vízszint mellett számítottnak.

Megjegyzendő, hogy a τ, illetve T fentebbi formulái a tartálynak a *fenéknyíláson át történő* részleges, illetve teljes *megtöltésénél* is használatosak (148. ábra).

α_3) Állandó keresztmetszet és változó vízszint mellett utánfolyással (148. ábra). *Feltételeink* ugyanazok, mint az α_2)-ben, azzal a különbséggel, hogy most állandó, időegységenként q_u térfogatú vízmennyiség *utánfolyásával* kell számolni (túlfolyó nincs).

E q_u *vízhozamnak* nyílásunk adatai (μ, f) mellett *megfelel* — a *Torricelli*-formula értelmében — egy $\xi_0' = h_0 - \xi_0$ *vízoszlopmagasság*, $q_u = \mu f\sqrt{2g\xi_0'}$ módon.

A tartályban a vízszint mindaddig süllyed, illetve emelkedik (mint látni fogjuk, ez elméletileg végtelen hosszú időt igényel), *amíg a vízoszlopmagasság el nem éri eme* ξ_0' *értékét. E* ξ_0' *vízoszlopmagasságnál* ugyanis *beáll a kiegyenlítődés a be- és kiömlő vízmennyiség között, a vízszint állandósul, a kiömlési folyamat stacionáriussá válik,* tehát az α_1)-ben mondottak érvényesülnek. *Éppen ezért e* ξ_0'*-t kiegyenlítődési magasságnak nevezzük.*

A folyamat differenciálegyenletét — amint az α_2)-ben részletesen kifejtettük — úgy nyerjük, hogy *a folytonosság tételének megfelelően* felírjuk a ki- és beömlő víztérfogat különbségének, valamint a tartálybeli víztérfogat változásának egyenlőségét, egy elenyésző $[t, t + dt]$ időközre vonatkozólag, amelyben a folyamat stacionáriusnak tekinthető. Ily módon [süllyedés, azaz $q(x) > q_u$ és $dx = -dx' > 0$ feltételezésével] a *differenciálegyenlet:*

$$F\,dx = [q(x) - q_u]\,dt = \left[\mu f\sqrt{2g(h_0 - x)} - q_u\right] dt,$$

vagy

$$-F\,dx' = [q(x) - q_u]\,dt = \left[\mu f\sqrt{2gx'} - q_u\right]dt.$$

Szeparálva, majd integrálva $x'(0) = h_0$ *feltétel mellett,* és $x'(\tau) = \xi'$ jelöléssel élve, nyerjük:

$$\frac{F\,dx'}{q_u - \mu f\sqrt{2gx'}} = dt, \qquad \int_0^{\tau} dt = \int_{h_0}^{\xi'} \frac{F\,dx'}{q_u - \mu f\sqrt{2gx'}},$$

illetve $q_0 = \mu f\sqrt{2g\xi'}$ felhasználásával:

$$\tau = \frac{F}{\mu f\sqrt{2g}} \int_{h_0}^{\xi'} \frac{dx}{\sqrt{\xi_0'} - \sqrt{x'}} = \frac{F}{\mu f\sqrt{2g}} \int_{\xi'}^{h_0} \frac{dx'}{\sqrt{x'} - \sqrt{\xi_0'}}.$$

A

$$\sqrt{x'} - \sqrt{\xi_0'} = y, \quad x' = (\sqrt{\xi_0'} + y)^2, \quad dx' = 2(y + \sqrt{\xi_0'})\,dy, \quad \eta_0 = \sqrt{h_0} - \sqrt{\xi_0'}, \quad \eta = \sqrt{\xi'} - \sqrt{\xi_0'}$$

helyettesítéssel, illetve jelöléssel:

$$I = 2\int_{\eta}^{\eta_0} \frac{y + \sqrt{\xi_0'}}{y}\,dy = 2\left[y + \sqrt{\xi_0'}\ln y\right]_{\eta}^{\eta_0} =$$

$$= 2\left[\sqrt{h_0} - \sqrt{\xi'} + \sqrt{\xi_0'}\ln\frac{\sqrt{h_0} - \sqrt{\xi_0'}}{\sqrt{\xi'} - \sqrt{\xi_0'}}\right].$$

Bevezetve még a $q_0 = \mu f\sqrt{2gh_0}$, $q = \mu f\sqrt{2g\xi'}$ jelöléseket, írhatjuk végül:

$$\tau = \frac{F}{\mu^2 f^2 g}\left[q_0 - q + q_u \ln\frac{q_0 - q_u}{q - q_u}\right].$$

Látható, hogy $\xi' \to \xi_0'$, azaz $q \to q_u$ esetén $\tau \to \infty$, azaz *a kiegyenlítődés, a vízszint állandósulása elméletileg végtelen sokáig tart.* Gyakorlatban ez, minthogy pl. $\xi' = 1{,}01\xi_0'$-nél már kiegyenlítődésről beszélünk, véges időt igényel.

Ha $q_u = 0$, akkor:

$$\tau = \frac{F}{\mu^2 f^2 g}[q_0 - q] = \frac{2F}{\mu f\sqrt{2g}}\left[\sqrt{h_0} - \sqrt{\xi'}\right],$$

vagyis az α_2)-ben levezetett formulára jutunk.

α_4) Változó keresztmetszet és vízszint mellett, utánfolyás nélkül (149. ábra). A többi *feltételek* ugyanazok, mint előbb. *A folyamat differenciálegyenlete* az α_2)-belihez hasonló, csakhogy most

$$F = \Phi(x') = F(x) \quad \text{és így:} \quad -\Phi(x')\,dx' = \mu f\sqrt{2gx'}\,dt,$$

$$\left[\text{vagy} \quad F(x)\,dx = \mu f\sqrt{2g(h_0 - x)}\,dt\right].$$

A változókat *szétválasztva, majd integrálva:*

$$\int_0^{\tau} dt = -\frac{1}{\mu f\sqrt{2g}} \int_{h_0}^{\xi'} \frac{\Phi(x')\,dx'}{\sqrt{x'}},$$

azaz

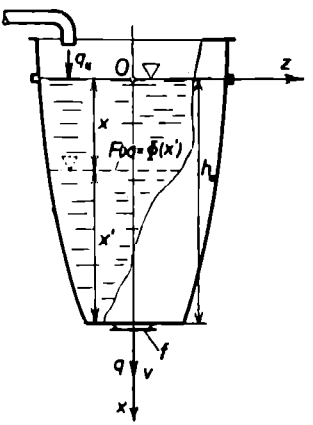
$$\tau = \frac{1}{\mu f\sqrt{2g}} \int_{\xi'}^{h_0} \frac{\Phi(x')\,dx'}{\sqrt{x'}}.$$

α_5) Változó keresztmetszet és vízszint mellett, utánfolyással (149. ábra). A többi *feltételek* változatlanok. *A folyamat differenciálegyenlete — az* α_3)-beli mintájára — (csak x' változóval):

$$-\Phi(x')\,dx' = [\mu f\sqrt{2gx'} - q_u]\,dt,$$

illetve a $q_u = \mu f\sqrt{2g\xi'_0}$ felhasználásával:

$$dt = -\frac{1}{\mu f\sqrt{2g}} \frac{\Phi(x'\,dx')}{\sqrt{x'} - \sqrt{\xi'_0}}.$$



149. ábra

Megoldása:

$$\tau = \frac{1}{\mu f\sqrt{2g}} \int_{\xi'}^{h_0} \frac{\Phi(x')\,dx'}{\sqrt{x'} - \sqrt{\xi'_0}}.$$

Ha $q_u = 0$, akkor az α_4)-beli végképletet kapjuk:

$$\tau = \frac{1}{\mu f\sqrt{2g}} \int_{\xi'}^{h_0} \frac{\Phi(x')\,dx'}{\sqrt{x'}}.$$

β) Kiömlés függőleges nyíláson*

β_1) Állandó keresztmetszet és vízszint mellett. Legyen adva valamely *egyenes hasáb alakú, állandó F keresztmetszetű tartály, egyik oldallapján függőleges szimmetriatengelyű, f keresztmetszetű nyílással.* Legyen továbbá a nyílás tetőpontja h_f, mélypontja h_a mélységben *a vízszint* alatt, melynek *állandó*ságát megfelelő utánfolyással (vagy túlfolyóval) biztosítjuk, s vele együtt a kiömlés *stacionárius* jellegét is (150. ábra).

Írjuk fel ismét a *Bernoulli-egyenlet*et a vízszint egy (1) pontjára és a nyílás egy h mélységben levő (2) pontjára (a ξ'-ket a nyílás mélypontjától felfelé mérve), feltételezve egyelőre, hogy a folyadék ideális, homogén, örvénymentesen áramló, továbbá az edény *zárt*, s a folyadék felett p_1 nyomás uralkodik:

$$\frac{v_2^2}{2g} + \xi'_2 + \frac{p_2}{\gamma} = \frac{v_1^2}{2g} + \xi' + \frac{p_1}{\gamma}.$$

* L. *Kövesi* i. m.; *Grüber—Blahó* i. m.

Figyelembe véve a $\xi_1' - \xi_2' = h$, $p_2 = p_0$ (atmoszférikus), $v_2 = v$, $v_1 = c$ adatokat és jelöléseket, valamint a *folytonosság* $Fc = fv$ egyenletét, rendezés után a *kiömlési sebesség:*

$$v = \sqrt{2g\left(h + \frac{p_1 - p_0}{\gamma} + \frac{c^2}{2g}\right)},$$

vagy egy másik, már ismert alakban:

$$v = \sqrt{\frac{2g\left(h + \frac{p_1 - p_0}{\gamma}\right)}{1 - \frac{f^2}{F^2}}}.$$

Ha a tartály nyitott ($p_1 = p_0$), *és az oldalnyílás* a tartály keresztmetszetéhez képest *kicsi* ($f \ll F$, azaz $c \ll v$), akkor a (jó közelítéssel érvényes)

$$v = \sqrt{2gh} \qquad (h_f \leqq h \leqq h_a)$$

*Torricelli-formulá*hoz jutunk. *Valóságos folyadék esetén ezt a* $\mu < 1$ *kifolyási tényező*vel ellátva,

$$v = \mu\sqrt{2gh}$$

alakban használjuk (150. ábra).

Nyitott tartály, kicsiny és elég mélyen levő oldalnyílás ($f \ll F$ és $h_f \approx h_a \approx h_0$) *esetén* ez utóbbin az időegység alatt kiömlő víztérfogat, az ún. *vízhozam*, az α_1)-hez hasonlóan (151. ábra):

$$q = vf = \mu f\sqrt{2gh_0},$$

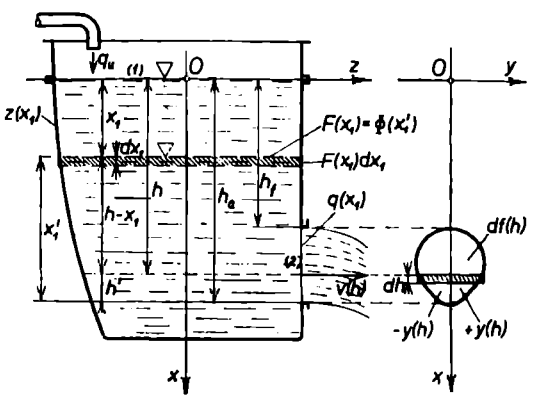
a t idő alatt kiömlő vízmennyiség:

$$Q = qt = \mu ft\sqrt{2gh_0};$$

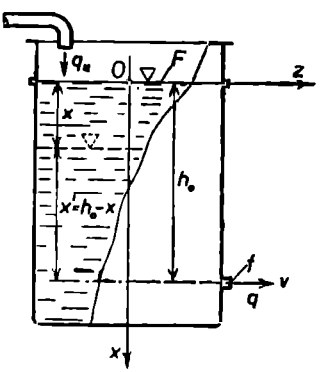
a tartálybelivel egyenlő $Q_0 = Fh_0$ térfogatú vízmennyiség kifolyása pedig

$$T = \frac{Q_0}{q} = \frac{F}{\mu f}\sqrt{\frac{h_0}{2g}}$$

idő alatt megy végbe (állandó vízszint mellett).



150. ábra



151. ábra

Ha — egyébként változatlan feltételek mellett — *az oldalnyílás nagy, akkor a viszonyok lényegesen bonyolultabbak.* Egyrészt most a nyílás minden szintjén más és más a kiömlési sebesség, másrészt *a Torricelli-formula használata már nem nyújthat jó közelítést, mert* — éppen a nagy nyílás miatt — *a tartálybeli víz c sebessége már nem hagyható figyelmen kívül.*

Gyakorlatilag — első közelítésre — mégis a Torricelli-formulával dolgoznak. Legyen *a nyílás peremgörbéjének egyenlete,* a 150. ábrán látható koordináta-rendszerben (az x tengely a görbe függőleges szimmetriatengelye, az y tengely a peremgörbe síkja és a vízszint metszésvonala):

$$y = \pm y(h), \quad \text{ahol} \quad h_f \leqq h \leqq h_a.$$

A *kiömlés $dq(h)$ differenciálját* (mint a 2. § szerint általában a differenciált) azon megfontolással nyerjük, mintha a nyílásnak a $[h, h+dh]$ rétegbeli és a $df(h) = 2y(h)\,dh$ terület-differenciálú (téglalap alakú) részén a v sebesség minden szinten a h mélységbelivel egyenlő, azaz (az említett első közelítés értelmében) $v(h) = \mu\sqrt{2gh}$ nagyságú lenne; vagyis:

$$dq(h) = df(h)\, v(h) = 2y(h)\,\mu\sqrt{2gh}\,dh.$$

E differenciáltörvényről határozott integrálás útján térünk rá a kiömlés integráltörvényére (vö. a 2. §-sal); *a nyílás vízhozama* tehát:

$$q_1 = 2\mu\sqrt{2g}\int_{h_f}^{h_a} y(h)\sqrt{h}\,dh = \mu\sqrt{2g}M_{1/2}.$$

(A q láthatóan az f nyílásterületnek az y tengelyre vonatkoztatott $n = \frac{1}{2}$-rendű nyomatékával arányos.) A tartályban a nyílás mélypontja feletti $Q_0 = Fh_a$ vízmennyiség van; ugyanekkora vízmennyiség kifolyása nyilván

$$T = \frac{Q_0}{q} = \frac{Fh_a}{\mu\sqrt{2g}M_{1/2}}$$

idő alatt megy végbe (állandó vízszint mellett).

Eme első közelítő eredmény birtokában a tartálybeli c sebesség figyelembevétele úgy történik, hogy a fentebbi $v = \sqrt{2g\left(h + \frac{c^2}{2g}\right)}$ képlettel összhangban, a q kifejezésében az integrál határait kiegészítjük $\frac{c^2}{2g}$ nyomómagassággal:

$$q_2 = 2\mu\sqrt{2g}\int_{h_f+\frac{c^2}{2g}}^{h_a+\frac{c^2}{2g}} y(h)\sqrt{h}\,dh.$$

A tartálybeli víz *c sebességét első közelítésben* a vele nem számoló q_1 segítségével nyerjük

$$c_1 = \frac{q_1}{F}$$

módon. A *második közelítés*, a c_1-gyel számoló q_2 alapján:

$$c_2 = \frac{q_2}{F}.$$

Az eljárás folytatásával a c és q tényleges értékét tetszőleges pontossággal megközelíthetjük.

Szokásos számítani *a nyíláson kiömlő víz középsebességét*; ez első közelítésben:

$$v_{1k} = \frac{q_1}{f} = \frac{2\mu\sqrt{2g}\int_{h_f}^{h_a} y(h)\sqrt{h}\,dh}{2\int_{h_f}^{h_a} y(h)\,dh} = \mu\sqrt{2g\xi_{1/2}},$$

ahol ξ_1 a nyíláskeresztmetszetnek az y tengelyre vonatkoztatott és az $f\sqrt{\xi_{1/2}} = \int_{(f)} \sqrt{h}\,df$ módon (az $n = 1$-rendű súlypont mintájára) definiált $n = \frac{1}{2}$-rendű középponti koordinátája.

Ha *a nyílással ellátott oldalfalat* (az x *tengellyel együtt*) függőleges helyzetből a vízszinteshez képest α hajlásszögű *ferde helyzetbe forgatjuk az y tengely körül*, akkor a nyílásban $h^* = h \sin\alpha$ mélységben a vízszint alatt a sebesség $v = \mu\sqrt{2gh^*} = \mu\sqrt{2gh\sin\alpha}$, míg a nyílás keresztmetszete változatlan. *A ferde falon levő nyílás vízhozama* tehát (első közelítésben):

$$q_1 = 2\mu\sqrt{2g\sin\alpha}\int_{h_f}^{h_a} y(h)\sqrt{h}\,dh.$$

β_2) Állandó keresztmetszet és változó vízszint mellett, utánfolyás nélkül (150. és 151. ábra). A vízszint nem állandó, a kiömlési folyamat nem stacionárius, tehát a *Bernoulli-egyenlet nem érvényes többé véges időszakra.* A folyamat differenciálegyenletét az α_2)-ben részletezett megfontolásokkal állítjuk fel.

Kicsiny és elég mélyen fekvő ($f \ll F$ és $h_a \approx h_f \approx h_0$) *oldalnyílás esetén differenciálegyenletünk* azonos az α_2)-belivel, mégpedig (x változóval):

$$F\,dx = \mu f\sqrt{2g(h_0 - x)}\,dt.$$

A vízszintsüllyedés időbeli lefolyásáról tehát a

$$\tau = \frac{2F}{f\mu\sqrt{2g}}\left[\sqrt{h_0} - \sqrt{h_0 - \xi}\right]$$

képlet tájékoztat, *a tartály teljes kiürítési idejét* pedig a

$$T=\frac{F}{f\mu}\sqrt{\frac{2h_0}{g}}$$

formula szolgáltatja. Ez utóbbi láthatóan kétszerese az állandó vízszint mellett nyert kiürítési időnek.

Megjegyzendő, hogy a τ, ill. T fenti képletét használjuk az edény részleges, illetve teljes *töltési* idejének számítására, *a nyíláson át* történő töltés esetén.

Nagy oldalnyílás esetén a Torricelli-formula — a β_1) értelmében — *csupán első közelítésben használható. A kiürítési idő* ez esetben *két részből tevődik össze.*

Az első $0 \leqq t_1 \leqq T_1$ *időszakban a vízszintsüllyedés:* $0 \leqq x_1 \leqq h_f$, *a nyílás tetőpontjáig.* Valamely t_1 időpontban, amikor a vízszintsüllyedés x_1 mértékű, a kiömlési sebesség h mélységben nyilván:

$$v(h)=\sqrt{2g(h-x_1)};$$

vele a kiömlés $dq(h)$ differenciálja a nyílás $[h, h+dh]$ rétegében, a β_1) mintájára:

$$dq(h)=v(h)\,df(h)=\mu\sqrt{2g(h-x_1)}\cdot 2y(h)\,dh,$$

a teljes nyíláson történő *kiömlés* pedig:

$$q(x_1)=2\mu\sqrt{2g}\int_{h_f}^{h_a} y(h)\sqrt{h-x_1}\,dh.$$

A kiömlési folyamat *differenciálegyenlete,* ezen időszakban, az α_2)-belihez hasonló megfontolással:

$$q(x_1)\,dt_1=F\,dx_1, \quad \text{illetve} \quad dt_1=F\frac{dx_1}{q(x_1)}.$$

A kiürítési idő első szakasza tehát:

$$\int_0^{T_1} dt_1=T_1=F\int_0^{h_f}\frac{dx_1}{q(x_1)}.$$

A kiürítési idő második $0 \leqq t_2 \leqq T_2$ *időszakában* a vízszintsüllyedés: $h_f \leqq x_2 \leqq h_a$, vagyis ekkor *a vízszint már a nyílásba esik (átbukás).* Valamely t_2 időpontban, amikor a vízszintsüllyedés x_2 méretű, az előbb vizsgált mennyiségek így alakulnak:

$$v(h)=\sqrt{2g(h-x_2)},$$
$$dq(h)=v(h)\,df(h)=\mu\sqrt{2g(h-x_2)}\cdot 2y(h)\,dh,$$

és ennek megfelelően

$$q(x_2)=2\mu\sqrt{2g}\int_{x_2}^{h_a} y(h)\sqrt{h-x_2}\,dh,$$

minthogy most már a nyílásnak csupán $x_2 \leqq h \leqq h_a$ szakaszán van kiömlés. A kiömlési folyamat *differenciálegyenlete* most:

$$q(x_2)\,dt_2=F\,dx_2, \quad \text{illetve} \quad dt_2=F\frac{dx_2}{q(x_2)}.$$

A kiürítési idő második szaka tehát:

$$\int_0^{T_2} dt_2 = T_2 = F \int_{h_f}^{h_a} \frac{dx_2}{q(x_2)}.$$

A teljes kiürítési idő pedig:

$$T = T_1 + T_2 = F\left[\int_0^{h_f} \frac{dx_1}{q(x_1)} + \int_{h_f}^{h_a} \frac{dx_2}{q(x_2)}\right].$$

A kiürítési időkre nyert formulákban az integrálandók rendszerint kellemetlen irracionális kifejezések, amelyek *integrálját gyakran nem sikerül előállítani elemi függvényekkel, zárt alakban.*

β_3) Állandó keresztmetszet és változó vízszint mellett, utánfolyással (150. és 151. ábra). Most — az előbbi feltételek mellett — még a q_u *vízhozamú utánfolyás*sal is számolni kell.

Kicsiny és elég mélyen fekvő oldalnyílás esetén ugyanazon megállapításokat tehetjük *a kiegyenlítődési folyamat*ra vonatkozólag, mint az α_3)-ban, a kicsiny vízszintes fenéknyílás esetére. Vagyis a folyamat *differenciálegyenlete* (x változóval), vízszintsüllyedést $[q(x) > q_u,\ dx > 0]$ feltételezve:

$$F\,dx = [q(x) - q_u]\,dt = \left[\mu\sqrt{2g(h_0 - x)} - q_u\right] dt;$$

a $\xi = h_0 - \xi'$ mértékű *vízszintsüllyedés ideje:*

$$\tau = \frac{2F}{\mu f\sqrt{2g}}\left[\sqrt{h_0} - \sqrt{h_0 - \xi} - \sqrt{h_0 - \xi_0}\,\ln\frac{\sqrt{h_0} - \sqrt{h_0 - \xi_0}}{\sqrt{h_0 - \xi} - \sqrt{h_0 - \xi_0}}\right].$$

ahol $q_u = \mu f\sqrt{2g(h_0 - \xi_0)}$ és ξ_0 a kiegyenlítődési mélység. Ha $\xi \to \xi_0$, akkor $\tau \to \infty$.

Nagy oldalnyílás esetén — vízszintsüllyedést $[q(x) > q_u$ és $dx > 0]$, valamint a nyílásba eső kiegyenlítődési szintet $[h_f < \xi_0 < h_a]$ feltételezve — *a kiegyenlítődési folyamat két szakaszból áll.*

Az első időszakban a folyamat differenciálegyenlete az α_3)-mal és a β_2)-vel összhangban:

$$F\,dx_1 = [q(x_1) - q_u]\,dt,$$

ahol

$$q(x_1) = 2\mu\sqrt{2g}\int_{h_f}^{h_a} y(h)\sqrt{h - x_1}\,dh,$$

ezen időszak tartama pedig:

$$T_1 = F\int_0^{h_f} \frac{dx_1}{q(x_1) - q_u}.$$

A második időszakban a vízszint a nyílás tetőpontjától a kiegyenlítődési szintig süllyed. A β_2) és az α_3) értelmében *a folyamat differenciálegyenlete:*

$$F\,dx_2 = [q(x_2) - q_u]\,dt_2,$$

ahol

$$q(x_2) = 2\mu\sqrt{2g}\int_{x_2}^{h_a} y(h)\sqrt{h - x_2}\,dh,$$

annak megfelelően, hogy most a nyílásnak csupán $x_2 \leqq h \leqq h_a$ szakaszán van kiömlés. *A kiegyenlítődési idő* ezek alapján:

$$T_2 = F\int_{h_f}^{\xi_0} \frac{dx_2}{q(x_2) - q_u},$$

amely az α_3) szerint végtelen; ezért véges idő nyerése céljából pl. csak $0{,}99\xi_0$-ig integrálunk.

Megjegyzendő, hogy ezen eredményeink csak *első közelítésben* érvényesek, mert nagy nyílásra a *Torricelli*-formulát használtuk. *Az integrálás* itt is *ritkán sikerül elemi úton, zárt alakban. Egyszerűbb esetekben* (pl. téglalap alakú nyílásnál) *a* $q(x_2)$ *binomiális sorba fejthető;* ennek első néhány tagjára szorítkozva, az integrál közelítő értékét állíthatjuk elő. Eredményeink ily módon két okból, fizikai és matematikai okból csak első közelítő pontosságúak lesznek.

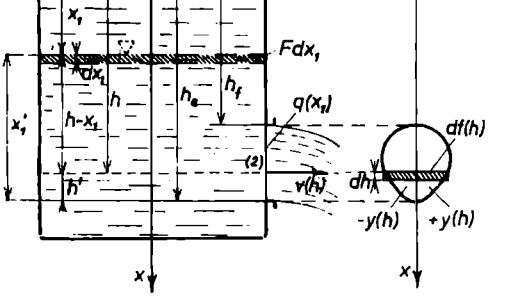
β_4) Változó keresztmetszet és vízszint mellett, utánfolyás nélkül (152. és 153. ábra). *Kicsiny és elég mélyen fekvő nyílás esetén* az α_4)-ben mondottakat ismételhetjük.

Nagy nyílás esetén, a β_2)-beli megállapítások érvényesek, azzal a különbséggel, hogy most $F = F(x)$, s így nem emelhető ki az integráljel elé. Tehát:

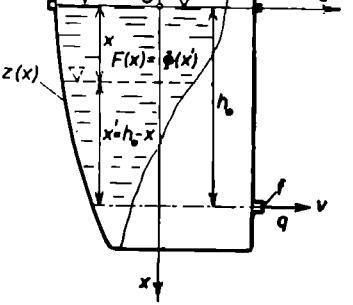
$$T_1 = \int_0^{h_f} \frac{F(x_1)\,dx_1}{q(x_1)}, \qquad T_2 = \int_{h_f}^{h_a} \frac{F(x_2)\,dx_2}{q(x_2)}.$$

A β_3)-ban említett okok miatt e képletek csak *első közelítésben* érvényesek, s az integrálás is legtöbbször csak *közelítő eljárással* végezhető.

β_5) Változó keresztmetszet és vízszint mellett, utánfolyással (152. és 153. ábra). *Kicsiny és elég mélyen fekvő nyílás esetén* az α_5)-beli megállapítások érvényesek;



152. ábra



153. ábra

nagy nyílásra pedig a β_3)-beliek, figyelembe véve, hogy most $F = F(x)$. Tehát:

$$T_1 = \int_0^{h_f} \frac{F(x_1)\,dx}{q(x_1) - q_u}, \qquad T_2 = \int_{h_f}^{0{,}99\xi_0} \frac{F(x_2)\,dx_2}{q(x_2) - q_u},$$

közelítő érvénnyel és megoldhatósággal.

Megjegyzendő, hogy ilyen bonyolult integrálok közelítő megoldását a gyakorlatban rendszerint *grafikusan* végzik.

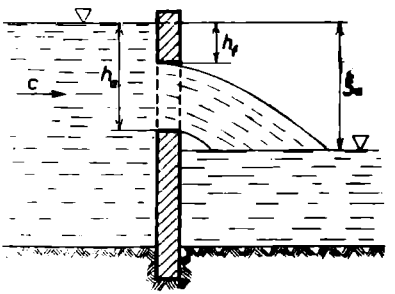
γ) Kifolyás zsilipeken és bukógátakon*

γ_1) Bevezetés. Itt lényegében a β)-ban tárgyaltaknak a *gyakorlatban nagyfontosságú* speciális eseteiről beszélünk. *A kifolyás a függőleges síkban* fekvő (s rendszerint függőleges szimmetriatengelyű téglalap alakú) *nyíláson át történik.*

Zsilip esetén a víz (legalább az egyik oldalon) nyaldossa a nyílás felső élét.

Bukógát esetén a nyílás felső éle mindkét oldalon a vízszint fölé esik, vagy teljesen hiányzik; a vízszint már a gát előtt lesüllyed, ezért 2—3 m-nyire előtte kell szintmérést végezni.

Alább — a *téglalap alakú nyílás*ra vonatkozó β)-beli példák eredményeinek felhasználásával — röviden tárgyaljuk a zsilipen és a bukógáton való kifolyás különböző eseteit.



154. ábra

γ_2) A zsilipen való kifolyás esetei:

A kifolyás a víz felett történik (154. ábra). *A nyílás alsó éle magasabban van, mint az alsó vízszint.* A zsilip *vízhozama* a β) 2. példa szerint:

$$q = \frac{2}{3}\mu a\sqrt{2g}\left[\left(h_a + \frac{c^2}{2g}\right)^{3/2} - \left(h_f + \frac{c^2}{2g}\right)^{3/2}\right].$$

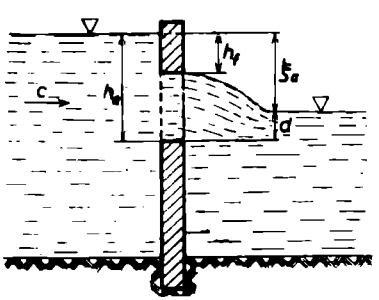
A kifolyás részben a víz felett, részben a víz alatt történik (155. ábra). *Az alsó vízszint a nyílás alsó és felső éle közé esik.* A q két részből áll; egyik része az alsó vízszint feletti *kifolyás*, a másik e vízszint alatti *átfolyás*. Eszerint:

$$q = q_1 + q_2 = \frac{2}{3}\mu\sqrt{2g}\left[\left(\xi_a + \frac{c^2}{2g}\right)^{3/2} - \left(h_f + \frac{c^2}{2g}\right)^{3/2}\right] + \mu\, ad\sqrt{2g\left(\xi_a + \frac{c^2}{2g}\right)},$$

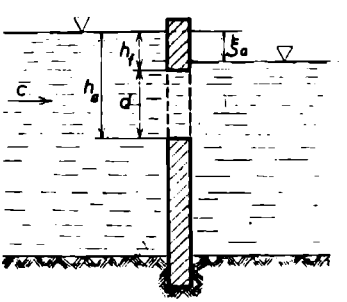
ahol q_2 láthatóan $fv(\xi_a, c)$ alakú, és d az átfolyó vízréteg vastagsága.

Az átfolyás teljesen a víz alatt történik (156. ábra). A *vízhozam* (az előbbi q_2 mintájára):

$$q = \mu\, ad\sqrt{2g\left(\zeta_a + \frac{c^2}{2g}\right)}.$$



155. ábra



156. ábra

* L. *Kövesi* i. m.

γ₁) Bukógáton való kifolyás (átbukás) esetei:

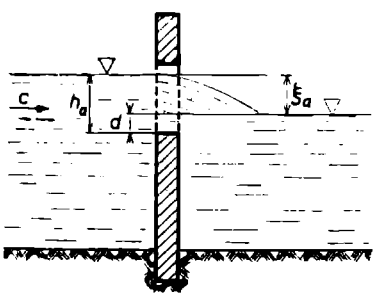
Tökéletes átbukáskor az alsó vízszint a bukónyílás alsó éle (az ún. *gátkorona*) *alatt van* (157. ábra). Ekkor a *vízhozam:*

$$q=\frac{2}{3}\mu a\sqrt{2g}\left[\left(h_a+\frac{c^2}{2g}\right)^{3/2}-\left(0+\frac{c^2}{2g}\right)^{3/2}\right].$$

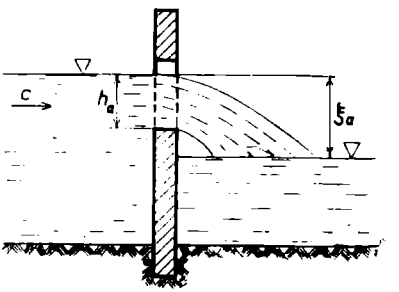
Tökéletlen átbukáskor az alsó vízszint a bukónyílás alsó éle felett van (158. ábra). Ilyenkor az utánfolyó víz *c* sebességét — szokás szerint — mellőzzük. A *q* vízhozam két részből áll: tökéletes *átbukás* az alsó vízszint felett; alatta *átfolyás*. Tehát

$$q=\frac{2}{3}\mu_1 a\sqrt{2g}\xi_a^{3/2}+\mu_2 ad\sqrt{2g\xi_a},$$

ahol $\mu_1=0{,}57$ és $\mu_2=0{,}62$.



157. ábra



158. ábra

A bukógát nyílása olykor nem téglalap alakú ($2y=a$), hanem peremgörbéjének egyenlete (a szokásos koordináta-rendszerben) $y=y(h)$ (196. a., b., c., d. ábra). Ha pl. a bukógát előtti csatorna keresztmetszete és vízszintje állandó, akkor *tökéletes átbukás esetén* a β_1)-beli

$$q_1=2\mu\sqrt{2g}\int_{h_f}^{h_a}y(h)\sqrt{h}\,dh$$

első közelítő képlettel dolgozunk, ahol most $h_f=0$; ha pedig a bukógáthoz *érkező víz c sebessége* is figyelembe veendő, akkor a

$$q_2=2\mu\sqrt{2g}\int_{0+\frac{c^2}{2g}}^{h_a+\frac{c^2}{2g}}y(h)\sqrt{h}\,dh$$

képletet használjuk, ahol $c=\frac{q_1}{F}$. A $H=h_a+\frac{c^2}{2g}$ mellett a $\frac{c^2}{2g}$ gyakran *elhanyagolható*.

Példák és feladatok

α | **1.** Egy *F* állandó keresztmetszetű *tartályban* h_0 magasságú, γ fajsúlyú *folyadék*, fölötte pedig állandó p_1 nyomású *gáz* van. A folyadék a *jelentős méretű f fenéknyíláson* ömlik ki a tartályból. Kérdés: *a) állandó folyadékszint* mellett mekkora *q* folyadékmennyi-

ség ömlik ki a nyíláson *időegységenként; b)* állandó folyadékszint mellett mennyi idő alatt ömlik ki a nyíláson *a tartálybelivel egyenlő Q_0 folyadékmennyiség; c)* mekkora a tartály T_i *kiürítési ideje?*

Az α_1)-ben a *Bernoulli-egyenletből* levezetett általános formula szerint a *kiömlési sebesség* a fenéknyílásban:

$$v=\sqrt{\frac{2g\left(h_0+\frac{p_1-p_0}{\gamma}\right)}{1-\frac{f^2}{F^2}}}.$$

ad *a)* A nyílás *folyadékhozama* tehát állandó h_0 folyadékoszlop-magasság mellett:

$$q=\mu v f=\mu\sqrt{\frac{2g\left(h_0+\frac{p_1-p_0}{\gamma}\right)}{\frac{1}{f^2}-\frac{1}{F^2}}}.$$

ad *b)* A $Q_0=Fh_0$ folyadékmennyiség *kiömlési ideje*, állandó folyadékszint mellett, az α_1) értelmében:

$$T_0=\frac{Q_0}{q}=\frac{h_0}{\mu}\sqrt{\frac{\frac{F^2}{f^2}-1}{2g\left(h_0+\frac{p_1-p_0}{\mu}\right)}}.$$

ad *c)* A *kiürítési idő*, az α_2) értelmében:

$$T=-F\int_h^0\frac{dx'}{q(x')}.$$

Bevezetve a

$$\frac{p_1-p_0}{\gamma}=h^*\quad\text{és}\quad\beta=\sqrt{\frac{2g}{\frac{1}{f^2}-\frac{1}{F^2}}}$$

jelöléseket, írhatjuk:

$$T=\frac{F}{\mu\beta}\int_0^{h_0}\frac{dx'}{\sqrt{x'+h^*}}=\frac{2F}{\mu\beta}\left[\sqrt{h_0+h^*}-\sqrt{h^*}\right].$$

Ha $f\ll F$ és $p_1=p_0$, azaz $\beta=f\sqrt{2g}$ és $h^*=0$, akkor:

$$T=\frac{2F}{\mu f}\sqrt{\frac{h_0}{2g}},$$

egyezésben az α_2)-beli végső formulával.

2. Adva egy *egyenes körhenger alakú*, fenéktől számítva h_0 magasságig vízzel telt, F keresztmetsztű *tartály*, lent f keresztmetszetű *kis nyílás*sal ($f \ll F$). Kérdés, *mennyi idő alatt száll le a vízszint a fenéktől számítva* h_1 *magasságig*. Számadatok: $D = 60$ cm; $h_0 = 1{,}2$ m; $h_1 = 1$ m; $d = 9$ mm; $\mu = 0{,}6$; $g = 9{,}81$ m/s^2 (159. ábra).

A kérdezett időt a β_1)-beli képlet segítségével számítjuk, azzal a különbséggel, hogy most a $(h_0 - h_1)$ vastagságú elfolyó folyadékrétegnek megfelelően $0 \leqq x \leqq h_0 - h_1$:

$$T_{h_1} = \frac{F}{\mu f\sqrt{2g}} \int_0^{h_0 - h_1} \frac{dx}{\sqrt{h_0 - x}} = \frac{2F}{\mu f\sqrt{2g}} \left[\sqrt{h_0 - x} \right]_{h_0 - h_1}^{0} =$$

$$= \frac{F}{\mu f}\sqrt{\frac{2}{g}} \left[\sqrt{h_0} - \sqrt{h_1} \right].$$

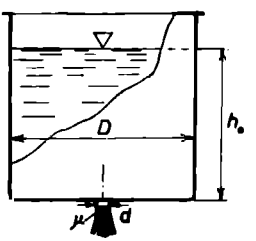
A *numerikus számítás*ra térve:

$$\sqrt{2g} = 4{,}429; \qquad F = 0{,}6^2 \frac{\pi}{4} = 0{,}283 \text{ m}^2; \qquad f = 0{,}009^2 \frac{\pi}{4} =$$

$$= 0.000\,0636 \text{ m}^2; \quad \frac{F}{f} = 4444;$$

$$\frac{F}{\mu f}\sqrt{\frac{2}{g}} = \frac{2F}{\mu f\sqrt{2g}} = \frac{2 \cdot 4444}{0{,}6 \cdot 4{,}429} = 3345;$$

$$\sqrt{h_0} = 1{,}095; \qquad \sqrt{h_1} = 1{,}0.$$



159. ábra

Végül ezek felhasználásával:

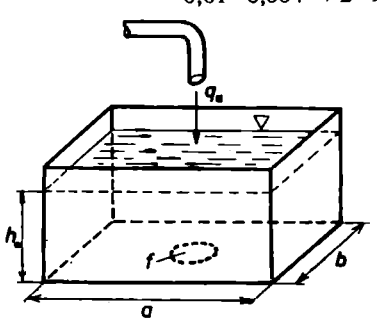
$$T_{h_1} = 3345(1{,}095 - 1{,}0) = 320'' = 5'\,20''.$$

3. Mennyi idő alatt *emelkedik* a vízszint $m = 1{,}5$ m-rel egy $F = 0{,}9$ m^2 keresztmetszetű *edény*ben az $f = 0{,}004$ m^2 területű *fenéknyíláson át* történő *töltés* esetén, ha a kezdeti vízoszlopmagasság $\xi' = 2{,}4$ m.

Az α_2)-ben levezetett formula szerint az *emelkedési idő*:

$$\tau = \frac{2F}{\mu f\sqrt{2g}} \left(\sqrt{h} - \sqrt{\xi'} \right) =$$

$$= \frac{2 \cdot 0{,}9}{0{,}61 \cdot 0{,}004 \cdot \sqrt{2 \cdot 9{,}81}} \left(\sqrt{2{,}4 + 1{,}5} - \sqrt{2{,}4} \right) = 70'' = 1'\,10''.$$



160. ábra

4. A 160. ábrán vázolt *medencé*ben a víz kezdeti magassága $h_0 = 8$m. Kérdés, hogy $a = 20$ m, $b = 10$ m, továbbá $f = 1$ m^2 területű fenéknyílás és $q_u = 6$ m^3/s *utánfolyás* esetén a vízoszlopmagasság *mikor közelíti meg a kiegyenlítődési magasságot* $1 \sim 1{,}5\%$-os eltéréssel.

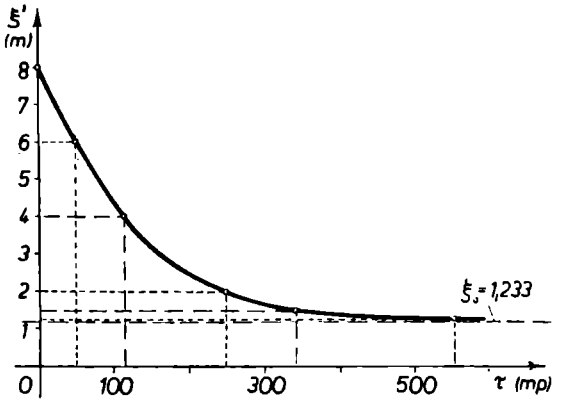
Esetünkben a *kiegyenlítődési vízoszlopmagasság*, az α_3) szerint:

$$\xi_0' = \frac{q_u^2}{\mu^2 f^2 \cdot 2g} = \frac{6^2}{0{,}60^2 \cdot 2^2 \cdot 2 \cdot 9{,}81} = 1{,}233 \text{ m}.$$

A τ *idő* és a tartálybeli ξ' *vízoszlopmagasság* közti összefüggés, az α_3) szerint:

$$\tau = \frac{2F}{\mu f\sqrt{2g}}\left[\sqrt{h_0} - \sqrt{\xi'} + \sqrt{\xi'_0}\ln\frac{\sqrt{h_0} - \sqrt{\xi'_0}}{\sqrt{\xi'} - \sqrt{\xi'_0}}\right] =$$

$$= 74{,}2\left[2{,}83 - \sqrt{\xi'} + 1{,}11\ln\frac{1{,}72}{\sqrt{\xi'} - 1{,}11}\right].$$



161. ábra

A függvénykapcsolat a $\xi' = 6$ m, 4 m 2 m, 1,5 m, 1,25 m vízoszlopmagasságokhoz rendre $\tau = 49$ mp, 115 mp, 259 mp, 342 mp, 554 mp időtartamokat rendel. Ezen értékpárok alapján a $\tau = \tau(\xi')$ *függvény* ábrázolható (161. ábra). A $\tau = 554$ mp-hez tartozó $\xi' = 1{,}25$ vízoszlopmagasság már csak

$$\frac{1{,}250 - 1{,}233}{1{,}233}\,100 = 1{,}38\%$$

mértékben tér el a kiegyenlítődési magasságtól, vagyis *a vízszint ekkora már gyakorlatilag állandósultnak tekinthető.*

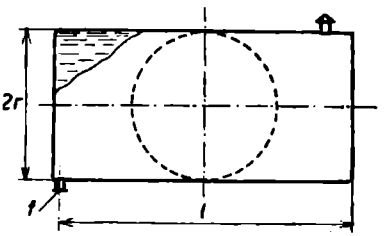
5. Mekkora az l hosszúságú, r sugarú *körhenger alakú, fekvő* f fenéknyílású (a fenti nyíláson át a levegővel közlekedő) *kazán kiürítési ideje?** (162. ábra).

Az α_4)-ben tárgyalt esettel van dolgunk. A *változó tartálykeresztmetszet* most:

$$F = \Phi(x') = 2zl,$$

ahol

$$z^2 + (x' - r)^2 = r^2, \quad \text{azaz} \quad z^2 = 2r'x - x'^2.$$



162. ábra

Ezzel — az α_4)-beli formula szerint — a *kiürítési idő:*

$$T_f = \frac{1}{\mu f\sqrt{2g}}\int_0^{h_0}\frac{\Phi(x')\,dx'}{\sqrt{x'}} = \frac{2l}{\mu f\sqrt{2g}}\int_0^{2r}\frac{\sqrt{x'(2r - x')}}{\sqrt{x'}}\,dx' =$$

$$= \frac{2l}{\mu f\sqrt{2g}}\int_0^{2r}\sqrt{2r - x'}\,dx' = \frac{4l}{3\mu f\sqrt{2g}}\left[(2r - x')^{3/2}\right]_{2r}^{0} = \frac{8l}{3\mu f\sqrt{2g}}r^{3/2}.$$

Ha pl. $l = 3$ m, $r = 0{,}6$ m, $\varrho = 4$ cm (nyílás), $\mu = 0{,}6$, akkor a kazán kiürítési ideje:

$$T_f = \frac{8 \cdot 300}{3 \cdot 0{,}6 \cdot 4^2\pi \cdot \sqrt{9{,}81}}\,60^{3/2} = 395 \text{ mp}.$$

* L. *Kövesi* i. m. 82. o.

6. *Állítsuk fel* az előbbi példában tárgyalt *kazánt*, és vizsgáljuk *kiürítési idejét*. A két eredményt összevetve állapítsuk meg, hogy *a kazán melyik helyzete előnyösebb* a kiürítési idő szempontjából (163. ábra).

Az álló kazán állandó $F=r^2\pi$ keresztmetszetű; tehát *kiürítési ideje*, az α_2) szerint:

$$T_á=\frac{2F}{f\mu}\sqrt{\frac{h_0}{2g}}=\frac{2r^2\pi}{\mu f\sqrt{2g}}\sqrt{l}.$$

A T_f és a $T_á$ értékét összevetve azt találjuk, hogy $T_á \leqq T_f$, azaz:

$$\frac{2r^2\pi}{\mu f\sqrt{2g}}\sqrt{l}\leqq\frac{8lr\sqrt{r}}{3\mu f\sqrt{g}},$$

vagy egyszerűsítve:

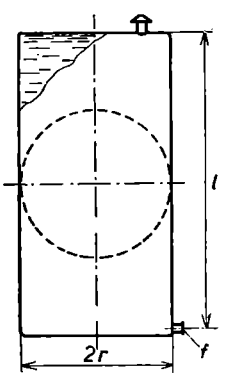
$$\frac{3\pi}{4}\leqq\sqrt{\frac{l}{r}},$$

hacsak:

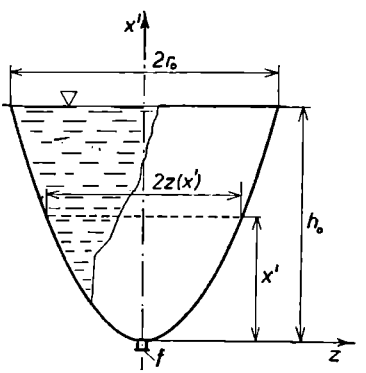
$$l\geqq l_0=\frac{9\pi^2}{16}r=2{,}8r.$$

A kazánoknál rendszerint $l>l_0$, tehát akkor a kiürítési idő szempontjából az *álló* helyzet kedvezőbb; a ritkább $l<l_0$ esetben a *fekvő* helyzet előnyösebb.

7. Határozzuk meg egy h_0 magasságú és r_0 peremkörsugarú, f fenéknyílású, színültig telt *forgási paraboloid alakú serleg kiürítési idejét* (164. ábra).



164. ábra



163. ábra

A serleg keresztmetszete, mélypontjától x' távolságban:

$$F=\Phi(x')=z^2(x')\pi=\left(r_0\sqrt{\frac{x'}{h_0}}\right)^2\pi=r_0^2\pi\frac{x'}{h_0},$$

vagyis a vízoszlop x magasságával *arányosan* változik. A kiürítési idő, az α_4) szerint:

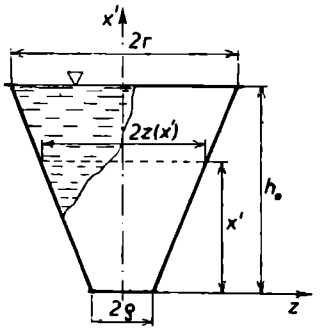
$$T=\frac{1}{\mu f\sqrt{2g}}\int_0^{h_0}\frac{\Phi(x')\,dx'}{\sqrt{x'}}=\frac{r_0^2\pi}{\mu h_0 f\sqrt{2g}}\int_0^{h_0}\sqrt{x'}\,dx'=\frac{2F_0\sqrt{h_0}}{3\mu f\sqrt{2g}},$$

ahol F_0 a kezdeti víztükör területe.

8. Állapítsuk meg a 165. ábrán látható *csonkakúp alakú tartály* kiürítési idejét.

A tartály keresztmetszete, fenekétől x' távolságban:

$$F=\Phi(x')=z^2(x')\pi=\left[\varrho+\frac{r-\varrho}{h_0}x'\right]^2\pi.$$



165. ábra

Ezzel a *kiürítési idő*, az α_4) szerint:

$$T=\frac{\pi}{\mu\varrho^2\pi\sqrt{2g}}\int_0^{h_0}\frac{\left[\varrho+\frac{r-\varrho}{h_0}x'\right]^2}{\sqrt{x'}}dx'.$$

A kijelölt műveleteket elvégezve, hatványfüggvények integrálása útján nyerjük:

$$T=\frac{2r^2\sqrt{h_0}}{15\mu\varrho^2\sqrt{2g}}\left[3+4\left(\frac{\varrho}{r}\right)+8\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2\right].$$

Ha $\frac{\varrho}{r}\ll 1$, akkor a *kúp* kiürítési ideje:

$$T=\frac{2F_0\sqrt{h_0}}{5f\mu\sqrt{2g}},$$

ahol F_0 a fedőkör és f a fenéknyílás területe.

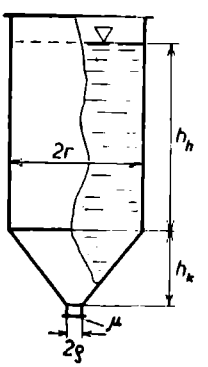
9. Meghatározandó a 166. ábrán látható *kúpos toldalékkal ellátott hengeres edény* kiürítési ideje, a következő adatok mellett:

$$r=1\text{ m},\quad \varrho=1\text{ cm},\quad h=2\text{ m},\quad k_k=1\text{ m},\quad \mu=0{,}8.*$$

A *felső hengeres* edényrész kiürítési ideje, az α_2) szerint:

$$T_h=\frac{2F}{\mu f\sqrt{2g}}\left[\sqrt{h_h+h_k}-\sqrt{h_k}\right]=$$

$$=\frac{2\cdot 1^2}{0{,}8\cdot 0{,}01^2\cdot\sqrt{2\cdot 9{,}81}}\left[\sqrt{2+1}-\sqrt{1}\right]=1^h\,8'\,53''.$$



166. ábra

Az *alsó kúpos* edényrész kiürítési ideje pedig, a 8. pl. eredménye szerint:

$$T_k=\frac{2r^2\sqrt{h_k}}{15\mu\varrho^2\sqrt{2g}}\left[3+4\left(\frac{\varrho}{r}\right)+8\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2\right]=$$

$$=\frac{2\cdot 1^2\cdot\sqrt{1}}{15\cdot 0{,}8\cdot 0{,}01^2\sqrt{2\cdot 9{,}81}}\left[3+4\cdot 0{,}01+8\cdot 0{,}01^2\right]=19'\,4''.$$

* L. *Kövesi* i. m. 87. o.

A *teljes kiürítési idő* tehát:

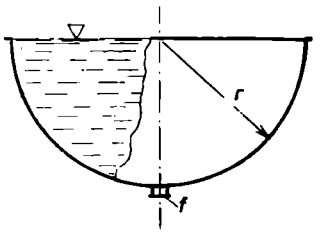
$$T = T_h + T_k = 1^h\ 27'\ 57''.$$

10. Számítsuk ki egy r sugarú, f fenéknyílással ellátott *félgömb alakú edény* kiürítési idejét (167. ábra). Az edény keresztmetszete, mélypontjától x' távolságban:

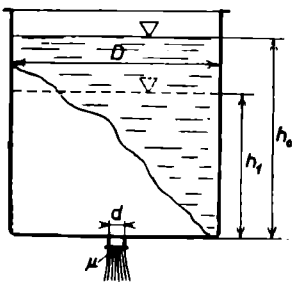
$$\Phi = \Phi(x') = z^2(x')\pi = [r^2 - (r - x')^2]\pi = (2rx' - r^2)\pi.$$

Ezzel a *kiürítési idő:*

$$T = \frac{\pi}{\mu f\sqrt{2g}} \int_0^r \frac{x'(2r - x')}{\sqrt{x'}}\, dx' = \frac{\pi}{\mu f\sqrt{2g}} \left[\frac{4}{3} r x'^{3/2} - \frac{2}{5} x'^{5/2}\right]_0^r = \frac{14\pi}{15\mu f\sqrt{2g}} r^{5/2}.$$



167. ábra



168. ábra

A $Q_0 = \frac{2}{3} r^3\pi$ és $q_0 = \mu f\sqrt{2gr}$ jelöléseket bevezetve, írhatjuk:

$$T = \frac{7}{5} \frac{Q_0}{q_0},$$

vagyis *a kiürítési idő* $\frac{7}{5}$*-ször akkora, mint az edénybelivel egyenlő* Q_0 *vízmennyiség kifolyási ideje, állandó vízszint mellett.*

11. Meghatározandó egy *függőleges henger alakú víztartály* kiürülésének ideje, ha $D = 10$ cm, $h_0 = 8$ m és $d = 50{,}4$ mm, $\mu = 0{,}62$ (168. ábra).

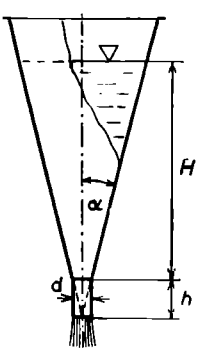
12. Egy *hengeres edény* fenekén rés van. Az edény adatai a következők: alapterülete 100 cm², magassága 30 cm. Határozzuk meg a rés területét, amennyiben a megtöltött edényből a víz 2 perc alatt folyik ki.

13. Egy vízzel telt *kúp alakú tölcsér* magassága $h = 20$ cm. A felső nyílás sugara $r = 12$ cm, az alsó nyílás, amelyen keresztül a víz a tölcsérből kifolyik, $\varrho = 0{,}3$ cm sugarú, *a)* Mennyi idő alatt csökken a víz szintje 5 cm-rel? *b)* Mikor ürül ki a tölcsér?

14. Meghatározandó a vízszint süllyedésének időtartama egy *körkúp alakú edény*ben, a kifolyó cső alsó nyílásától számítva $h + H$ szintről h szintig, ha $d = 2h \operatorname{tg} \alpha$ (169. ábra).

15. Egy *henger alakú mérőedény* átmérője $2r$, magassága h_a. Kúpos fenekén 2ϱ átmérőjű nyílás van, amely jelentéktelenül kicsiny a mérőedény átmérőjéhez viszonyítva.

Meghatározandó az az időtartam, amely alatt a mérőedényben a vízszint $x' < h_k$-ra süllyed (166. ábra).



169. ábra

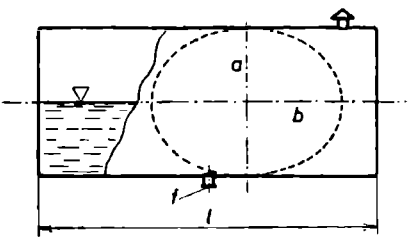
16. Egy $r = 43$ cm sugarú, *félgömb alakú üst* fenekén $f = 0{,}2$ cm^2 területű repedés van. Mennyi idő alatt folyik ki a víz a színig telt üstből (167. ábra)?

17. Egy *kazán* vízszintes tengelyű *elliptikus henger alakú*. Az ellipszis keresztmetszet (merőleges a henger tengelyére) féltengelyei egyenlők b-vel (vízszintes) és a-val (függőleges); a henger alkotójának hossza l (170. ábra). A kazánt félig megtöltjük vízzel. Mennyi idő alatt folyik ki a víz a kazánból az alján levő f területű résen keresztül?

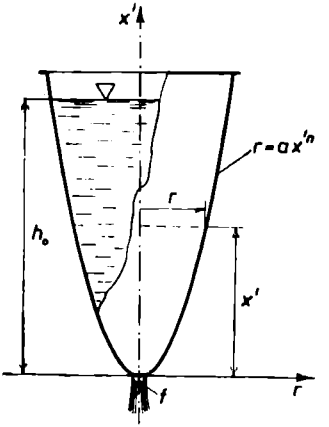
18. *Forgásfelület alakú edény* alakját hengerkoordinátákban az $r = ax'^n$ egyenlet határozza meg. Az edény folyadékkal van megtöltve h_0 magasságig. A folyadék a koordinátarendszer kezdőpontjában elhelyezett nyíláson át folyik ki az edényből (171. ábra).

Meghatározandó az edény kiürülésének időtartama, a V folyadéktérfogat és a q_{max} maximális kiömlő vízmennyiség segítségével.

***19.** Egy *hajó léket* kapott $f = 50$ cm^2 területű kis függőleges nyílás formájában, $h_0 = 1$ m-rel a vízszint alatt. A hajó térfogata $V = 10\,000$ m^3. A hajó terheléssel együtt a szerencsétlenség pillanatában $G = 8000$ tonnát nyom. Az elmerülő hajóűr felülete $F = 2000$ m^2.



170. ábra

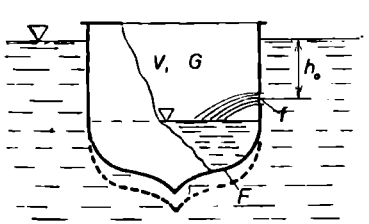


171. ábra

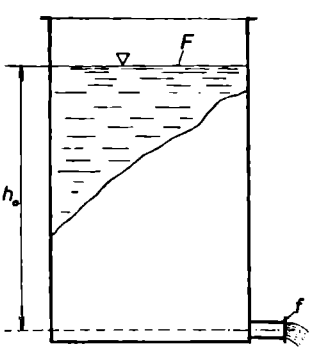
Meghatározandó, hogy mennyi idő alatt süllyed el a hajó, ha a kiömlési tényező $\mu = 0{,}61$. Feltételezzük, hogy a hajóűrben a vízszint egész idő alatt a lék alatt van (172. ábra).

β | **1.** Adva egy *egyenes hasáb alakú*, F keresztmetszetű *edény*, oldalán $f \ll F$ *kis nyílással*. A vízszintet e nyílás felett állandó h_0 magasságban tartjuk. Kérdés, mekkora a *nyílásban a víz sebessége*, az *időegység* és t *idő alatt kiömlő víz mennyisége*. [A vizet tekintsük ideális folyadéknak (173. ábra).]

A *Torricelli*-formula szerint a folyadék *sebessége* a vízszint alatt h_0 mélységben levő nyílásban:



172. ábra



173. ábra

$$v = \sqrt{2gh_0}.$$

A nyíláson *időegység alatt kiömlő vízmennyiség:*

$$q = fv = f\sqrt{2gh_0},$$

a t idő alatt pedig:

$$Q = qt = ft\sqrt{2gh_0},$$

hangsúlyozva a *vízszint állandóságát.* Az edényben (a nyílás fölött) levővel egyenlő folyadékmennyiség nyilván

$$T = \frac{Q_0}{q} = \frac{Fh_0}{f\sqrt{2gh_0}} = \frac{F}{f}\sqrt{\frac{h_0}{2g}}$$

idő alatt ömlik ki.

2. Valamely *egyenes hasáb alakú edény* oldalfalán *téglalap alakú nyílás* van. E nyílás felső éle az állandó vízszint alatt h_f, az alsó éle h_a mélységben van, vízszintes éle b hosszú. Mekkora a nyíláson időegység alatt kiömlő víz mennyisége? Mennyi idő alatt ömlik ki az edényben (a nyílás alsó éle fölött) levővel egyenlő vízmennyiség? (Ideális folyadék!) (174. ábra.)

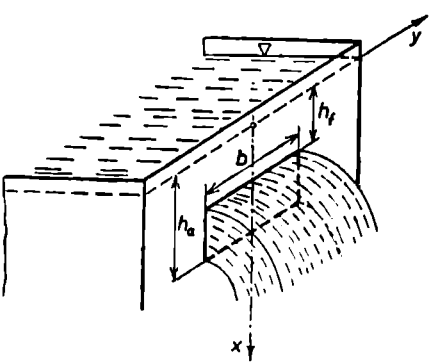
Jelen esetben:

$$y = \pm y(h) = \pm\frac{b}{2}.$$

Az időegység alatt kiömlő vízmennyiség a β_1)-ben megadott első *közelítő képlet* szerint:

$$q = 2\sqrt{2g}\,\frac{b}{2}\int_{h_f}^{h_a}\sqrt{h}\,dh =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{2g}\,b\,(h_a^{3/2} - h_f^{3/2}).$$



174. ábra

Ha $h_f = 0$ (azaz a nyílás felső éle a vízszintbe esik; ilyenkor átbukásról beszélünk), akkor:

$$q = \frac{2}{3}\sqrt{2g}bh_a^{3/2} = \frac{2}{3}bh_a\sqrt{2gh_a} =$$

$$= \frac{2}{3}fv_a = fv_k,$$

azaz *a kiömlő víz* ún. *középsebessége* (v_k) *a legalsó kiömlő rétegbeli sebesség* (v_a) $\frac{2}{3}$*-ával egyenlő.*

A második kérdésben említett vízmennyiség $h_f = 0$ esetén nyilván

$$T = \frac{Q_0}{q} = \frac{3Fh_a}{2\sqrt{2g}\,bh_a^{3/2}}$$

idő alatt hagyja el az edényt.

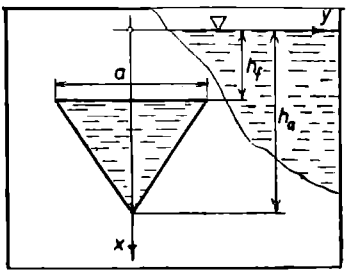
3. Állapítsuk meg az 1. példában említett *edény kiürítési idejét*. A *kis nyílás* feletti folyadékoszlop kezdeti magassága h_0; *utánfolyás nincs*.

Legyen $F/f = 25$ és $|h_0| = |g|$. (Ideális folyadék.)

A kérdezett *kiürítési idő*, a β_1)-ben megadott képlet szerint:

$$T = \frac{F}{f\sqrt{2g}} \int_0^{h_0} \frac{dx}{\sqrt{h_0 - x}} = \frac{F}{f}\sqrt{\frac{2h_0}{g}} = 25\sqrt{2}.$$

4. Mennyi víz ömlik ki a *tartály* függőleges oldalfalán levő, a 175. ábrán látható *háromszög alakú nyíláson, állandó* (és a nyílás fölött levő) *vízszint mellett?*



175. ábra

A β_1)-ben nagy nyílásra megadott első közelítő formulával dolgozunk. Esetünkben

$$y - 0 = \frac{0 - \frac{a}{2}}{h_a - h_f}(h - h_a)$$

(két ponton átmenő egyenes egyenleteként). Ezzel a *vízhozam:*

$$q_1 = 2\mu\sqrt{2g}\int_{h_f}^{h_a} y(h)\sqrt{h}\,dh = \frac{\mu a\sqrt{2g}}{h_a - h_f}\int_{h_f}^{h_a}(h_a - h)\sqrt{h}\,dh =$$

$$= \frac{\mu a\sqrt{2g}}{h_a - h_f}\left[\frac{2}{3}h_a h^{3/2} - \frac{2}{5}h^{5/2}\right]_{h_f}^{h_a} = \frac{2\mu a\sqrt{2g}}{15(h_a - h_f)}(2h_a^{5/2} - 5h_a h_f^{3/2} + 3h_f^{5/2}).$$

Ha a nyílás felső éle a vízszintbe esik, azaz $h_f = 0$, akkor:

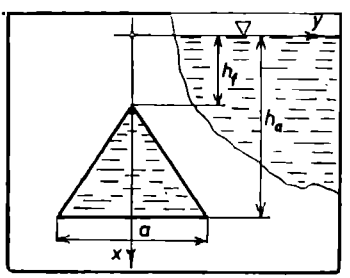
$$q_1 = \frac{4}{15}\mu a h_a\sqrt{2gh_a}.$$

A vízmérésre használatos ún. *Thomson-féle bukógátnál** $a = 2h_a$ és $h_f = 0$; következésképpen:

$$q_1 = \frac{8}{15}\mu\sqrt{2g}h_a^{3/2} = kh_a^{3/2}.$$

Weissbach szerint $k = 1{,}46$, s így $q_1 = 1{,}46h_a^{5/2}$.

5. Vizsgáljuk meg, hogyan módosul az előző példában számított vízhozam, ha a *háromszög alakú nyílás* (ugyanott) *csúcsával felfelé* mutat (176. ábra).



176. ábra

Ez esetben:

$$y = \frac{a}{2(h_a - h_f)}(h - h_f),$$

és így az előző módon:

$$q_1 = \frac{\mu a\sqrt{2g}}{h_a - h_f}\int_{h_f}^{h_a}(h - h_f)\sqrt{h}\,dh = \frac{2\mu a\sqrt{2g}}{15(h_a - h_f)}(3h_a^{5/2} - 5h_f h_a^{3/2} + 2h_f^{5/2}),$$

* L. *Kövesi* i. m. 94. o.

vagyis az előző végeredmény zárójeles kifejezésében a h_a és a h_f egyszerűen *szerepet cserél.* Ha a nyílás csúcsa éppen a vízszintben van, azaz $h_f = 0$, akkor:

$$q_1 = \frac{6}{15}\mu a h_a \sqrt{2gh_a},$$

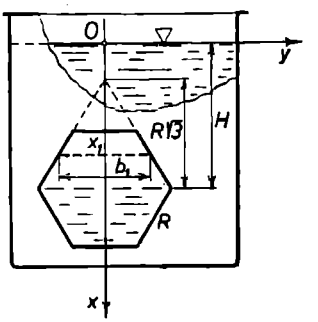
vagyis a háromszög alakú nyílás ilyen elhelyezésénél *másfélszer akkora a vízhozam,* mint az előző elhelyezésnél.

6. *Hasáb alakú edény* függőleges oldalfalán R oldalú *szabályos hatszög alakú nyílás* van. A középpont feletti folyadékoszlop állandó ($H > R\sqrt{3}$) magasságú.

Meghatározandó a *kiömlő vízmennyiség.*

Osszuk fel a hatszögletű nyílást két trapézra, és vizsgáljuk először a *felső* trapézon a kiömlést. Geometriai adatokból kapjuk a következőt (177. ábra):

$$b_1 = \frac{2(x_1 - H + R\sqrt{3})}{\sqrt{3}}.$$



177. ábra

A vízszint alatt x_1 mélységben levő $b_1\,dx$ területű *elemrésen* át időegység alatt kiömlő vízmennyiség:

$$dq_1 = \mu b_1\,dx_1\sqrt{2gx_1} =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\mu\sqrt{2g}(x_1 - H + R\sqrt{3})\sqrt{x_1}\,dx_1.$$

A felső trapézon át kifolyó vízmennyiséget integrálás útján kapjuk meg:

$$q_1 = \frac{2\mu\sqrt{2g}}{\sqrt{3}}\int_{H-\frac{R}{2}\sqrt{3}}^{H}(x_1 - H + R\sqrt{3})\sqrt{x_1}\,dx_1 =$$

$$= \frac{2\mu}{15\sqrt{3}}\sqrt{2g}\left[(10\sqrt{3}R - 4H)H^{3/2} + (4H - 7\sqrt{3}R)\left(H - \sqrt{3}\frac{R}{2}\right)^{3/2}\right].$$

Hasonló módon eljárva, nyerjük az *alsó* trapézon keresztül kiömlő folyadékmennyiséget:

$$q_2 = \frac{2\mu}{15\sqrt{3}}\sqrt{2g}(4H + 10\sqrt{3}R)H^{3/2} - (4H + 7\sqrt{3}R)\left(H + \sqrt{3}\frac{R}{2}\right)^{3/2}\Big].$$

Az *egész* kiömlő folyadékmennyiség pedig:

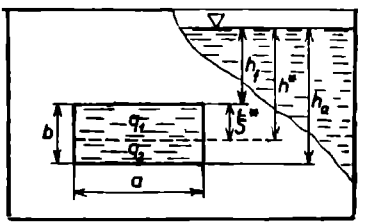
$$q_0 = q_1 + q_2 = \frac{2\mu}{15\sqrt{3}}\sqrt{2g}\left[20\sqrt{3}RH^{3/2} + (4H - 7\sqrt{3}R)\left(H - \sqrt{3}\frac{R}{2}\right)^{3/2} -\right.$$
$$\left. - (4H + 7\sqrt{3}R)\left(H + \sqrt{3}\frac{R}{2}\right)^{3/2}\right].$$

A $H = R\sqrt{3}$ lévén, írhatjuk végül:

$$q_0 = 0{,}646\mu R^2\sqrt{2gR}.$$

*7. Egy *tartály* függőleges oldalfalán *téglalap alakú nyílás* van (178. ábra). Kérdés, hogyan kell a nyílást *vízszintesen két részre osztani*, hogy mindkettőn *egyenlő vízmennyiség* ömöljék ki. A víz szintjét a tartályban a nyílás felső éle felett állandó h_f magasságban tartjuk.

A β_1) és a 2. példa értelmében a nyílás $h_f \leqq h_1 \leqq h^*$ szakaszán időegységenként



178. ábra

$$q_1 = \frac{2}{3}\mu a\sqrt{2g}(h^{*3/2} - h_f^{3/2})$$

vízmennyiség, a $h^* \leqq h_2 \leqq h_a$ szakaszán pedig

$$q_2 = \frac{2}{3}\mu a\sqrt{2g}(h_a^{3/2} - h^{*3/2})$$

vízmennyiség ömlik ki. A h^*-ot úgy kell választani a feladat értelmében, hogy

$$q_1 = q_2,$$

azaz

$$2h^{*3/2} = h_a^{3/2} + h_f^{3/2}$$

legyen, vagy másként

$$2(h_f + \xi^*)^{3/2} = (h_f + b)^{3/2} + h_f^{3/2}.$$

A h_f-fel osztva:

$$2\left(1 + \frac{\xi^*}{h_f}\right)^{3/2} = \left(1 + \frac{b}{h_f}\right)^{3/2} + 1.$$

Ha $b < h_f$, akkor az egyenlet mindkét oldalán *binomiális sorfejtést* alkalmazhatunk; az első 3 tagra szorítkozva:

$$2\left(1 + \frac{3}{2}\frac{\xi^*}{h_f} + \frac{3}{8}\frac{\xi^{*2}}{h_f^2} + \dots\right) =$$

$$= \left(1 + \frac{3}{2}\frac{b}{h_f} + \frac{3}{8}\frac{b^2}{h_f^2} + \dots\right) + 1.$$

Rendezés útján nyerjük (közelítő érvénnyel):

$$\xi^{*2} + 4h_f\xi^* - \left(2bh_f + \frac{b^2}{2}\right) = 0,$$

amelynek (egyik) megoldása s vele a nyílás felső részének *keresett magassága*:

$$\xi^* = -2h_f + \sqrt{4h_f^2 + 2bh_f + \frac{b^2}{2}};$$

(a másik gyök műszakilag értelmetlen).

8. Mekkora a *tartály* függőleges falán levő *kör alakú nyílás* vízhozama, állandó (és a nyílás fölötti) vízszint mellett (179. ábra)?

Ismét a β_1) szerint járunk el. Jelen esetben a nyílás peremgörbéjének egyenlete a szokásos koordináta-rendszerben:

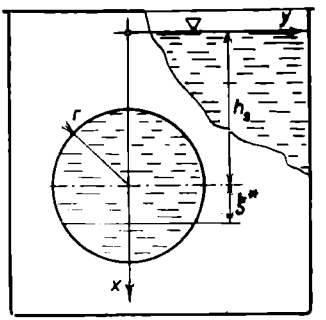
$$(h-h_s)^2+y^2=r^2,$$

azaz

$$y(h)=\sqrt{r^2-(h-h_s)^2}.$$

Ezzel a vízhozam közelítőleg:

$$q_1=2\mu\sqrt{2g}\int_{h_a}^{h_f}\sqrt{h}\sqrt{r^2-(h-h_s)^2}\,dh.$$



179. ábra

Mivel az integrálandó h 3.-fokú polinomjának négyzetgyöke, *az integrálás nem végezhető el elemi módszerekkel.*

Ha viszont *a nyílás tetőpontja a vízszintbe esik*, azaz $h_f=0$, $h_s=r$, $h_a=2r$, akkor:

$$q_1=2\mu\sqrt{2g}\int_0^{2r}\sqrt{h}\sqrt{2hr-h^2}\,dh=2\mu\sqrt{2g}\int_0^{2r}h\sqrt{2r-h}\,dh=$$

$$=2\mu\sqrt{2g}\left[-\frac{2}{3}h(2r-h)^{3/2}-\frac{4}{15}(2r-h)^{5/2}\right]_0^{2r}=\frac{8}{15}\mu\sqrt{2g}\,(2r)^{5/2}=\frac{64}{15}\mu\sqrt{g}\,r^{5/2}.$$

Az eredetileg felvetett problémának egy, a gyakorlatban használatos *közelítő megoldásá*t ismertetjük még.*

Lévén a nyílásra vonatkozólag

$$2y\,dh=df,$$

a q_1 formulája így is írható:

$$q_1=\mu\sqrt{2g}\int_{(f)}\sqrt{h}\,df=\mu\sqrt{2g}\int_{(f)}\sqrt{h_s+\xi^*}\,df,$$

ahol ξ^* a kör vízszintes átmérőjétől (lefelé) mért ordináta és f a nyílás területe. Ha $h\geqq\xi^*_{\max}=r$, akkor az integrálandó *binomiális sor*ba fejthető; az első 4 tagra szorítkozva:

$$\sqrt{h_s+\xi^*}=\sqrt{h_s}\sqrt{1+\frac{\xi^*}{h_s}}=\sqrt{h_s}\left(1+\frac{1}{2}\frac{\xi^*}{h}-\frac{1}{8}\frac{\xi^{*2}}{h^2}+\frac{1}{16}\frac{\xi^{*3}}{h^3}-+\ldots\right)^{**}.$$

Mivel szimmetriaokok miatt

$$\int_{(f)}\xi^*\,df=\int_{(f)}\xi^{*3}\,df=0,$$

* L. *Kövesi* i. m. 96. o.

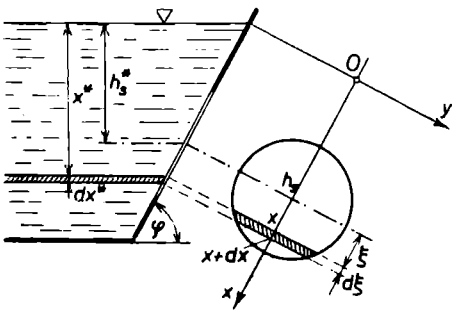
** Lévén itt $n=\frac{1}{2}>-1$, sorunk $\xi^*/h_s=1$, azaz $h_s=r$ esetben is konvergens. L. *Szász* i. m. I. kt. 631. o.

így a vízhozam közelítőleg:

$$q_1 = \mu\sqrt{2gh_s}\left[\int_{(f)} df - \frac{1}{8h_s^2}\int_{(f)} \xi^{*2}\, df\right] = \mu\sqrt{2gh_s}\left(f - \frac{1}{8h_s^2} I_s\right) =$$

$$= \mu\sqrt{2gh_s}\, r^2\pi\left(1 - \frac{r^2}{32h_s^2}\right).$$

Ha *a nyílás tetőpontja a vízszintbe esik*, azaz $h_s = r$, akkor:



180. ábra

$$q_1 = \mu\sqrt{2gr}\cdot r^2\pi\left(1 - \frac{1}{32}\right) = 0{,}964\pi\mu\sqrt{2g}\, r^{5/2},$$

ami jól egyezik a fentebb, más úton nyert eredménnyel, mert:

$$0{,}964\pi = 3{,}02 \quad \text{és} \quad \frac{32\sqrt{2}}{15} = 3{,}01.$$

9. Meghatározandó a *ferde oldalfal körszelvényű nyílásán*, állandó vízszint mellett kifolyó víz mennyisége* (180. ábra).

A $df = 2y\, dy$ szelvényelemen másodpercenként kiömlő vízmennyiség a β_1) szerint:

$$dq = \mu\, df\sqrt{2gx^*},$$

ahol

$$x^* = r\sin\varphi = (h_s \pm \xi)\sin\varphi = h_s^* \pm \xi\sin\varphi = h_s^*\left(1 \pm \frac{\xi}{h_s}\sin\varphi\right).$$

Fejtsük binomiális sorba a

$$\sqrt{x^*} = \sqrt{h_s^*}\left(1 \pm \frac{\xi}{h^*}\sin\varphi\right)^{1/2}$$

kifejezést:

$$\sqrt{x^*} = \sqrt{h_s^*}\left[1 \pm \frac{1}{2}\frac{\xi}{h_s^*}\sin\varphi - \frac{1}{8}\left(\frac{\xi}{h_s^*}\right)^2\sin^2\varphi \pm \frac{1}{16}\left(\frac{\xi}{h_s^*}\right)^3\sin^3\varphi - \frac{5}{128}\left(\frac{\xi}{h^*}\right)^4\sin^4\varphi \pm \ldots\right].$$

Minthogy szimmetriaokok miatt az $\int df\xi = 0$ és $\int df\xi^3 = 0$, továbbá a negyedik, valamint a többi tagot mellőzzük, ezért a vízhozam közelítőleg:

$$q = \mu\int_{(f)} df\sqrt{2gh_s^*}\left[1 - \frac{1}{8}\left(\frac{\xi}{h_s^*}\right)^2\sin^2\varphi\right],$$

azaz:

$$q = \mu\sqrt{2gh_s^*}\left(f - \frac{1}{8}\frac{I}{h_s^{*2}}\sin^2\varphi\right).$$

* L. *Kövesi:* Hidraulika.

Tehát kör esetén:

$$q=\mu\sqrt{2gh_s^*}\left(\frac{d^2\pi}{4}-\frac{1}{8}\,\frac{d/\pi}{64h_s^{*2}}\sin^2\varphi\right)=$$

$$=\mu\sqrt{2gh_s^*}\,\frac{d^2\pi}{4}\left(1-\frac{1}{128}\,\frac{d^2\sin^2\varphi}{h_s^{*2}}\right).$$

Ha a nyílás *függőleges*, akkor $\left(\sin\varphi=1 \text{ és } r=\frac{d}{2} \text{ lévén}\right)$ nyerjük:

$$q=\mu\sqrt{2gh_s^*}\,r^2\pi\left(1-\frac{1}{32}\,\frac{r^2}{h_s^{*2}}\right).$$

Ha a nyílás *vízszintes* h_s^* mélységben, akkor ($\sin\varphi=0$ lévén) írhatjuk:

$$q=\mu\sqrt{2gh_s^*}\,r^2\pi=v(h_s^*)f,$$

összhangban az ismert eredménnyel.

10. Állapítsuk meg a 2. példában említett *edény kiürítési idejét*. A *téglalap alakú nyílás* felső éle feletti vízoszlop kezdeti magassága h_f; *utánfolyás nincs*. (Ideális folyadék!)

A β_2) szerint a kiürítés első szakaszában, az x_1 méretű vízszintsüllyedés t_1 pillanatában ($0\leqq x_1\leqq h_f$) a kiömlés:

$$q(x_1)=2\sqrt{2g}\int_{h_a}^{h_f} y(h)\sqrt{h-x_1}\,dh=\sqrt{2g}\,b\int_{h_f}^{h_a}\sqrt{h-x_1}\,dh=$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{2g}\,b[(h_a-x_1)^{3/2}-(h_f-x_1)^{3/2}].$$

Ennek birtokában a kérdezett kiürítési idő *első szaka:*

$$T_1=F\int_0^{h_f}\frac{dx}{q(x_1)}=\frac{3F}{2\sqrt{2g}\,b}\int_0^{h}\frac{dx_1}{(h_a-x_1)^{3/2}-(h_f-x_1)^{3/2}}.$$

Bár a nyílás egyszerű, a kiömlési idő — mint látható — *nem számítható elemi úton*. A $(h_a-x_1)^{3/2}$ és a $(h_f-x_1)^{3/2}$ binomiális sorát igénybe véve és ezek első két tagjára szorítkozva, *közelítő megoldást* állíthatunk elő:

$$T_1=\frac{3F}{2\sqrt{2g}\,b}\int_0^{\cdot}\frac{dx_1}{(h_a^{3/2}-h_f^{3/2})-\frac{3}{2}(h_a^{1/2}-h_f^{1/2})x_1}=$$

$$=\frac{F}{b\sqrt{2g}(\sqrt{h_a}-\sqrt{h_f})}\int_{0,}^{h_f}\frac{dx_1}{\frac{2}{3}(h_a+\sqrt{h_ah_f}+h_f)-x_1}=$$

$$=\frac{F}{b\sqrt{2g}(\sqrt{h_a}-\sqrt{h_f})}\ln\frac{2(h_a+\sqrt{h_ah_f}+h_f)}{2h_a+2\sqrt{h_ah_f}-h_f}.$$

A kiürítés *második szakában* (átbukás), az x_2 vízszintsüllyedés t_2 időpontjában ($h_f \leqq x_2 \leqq h_a$), a β_2) szerint:

$$q(x_2) = b\sqrt{2g}\int_{x_2}^{h_a}\sqrt{h-x_2}\,dh = \frac{2}{3}b\sqrt{2g}\,(h_a-x_2)^{3/2},$$

ahol $(h_a - x_2)$ a nyíláson kiömlő vízréteg vastagsága a t_2 időpontban. A kiürítési idő második szaka tehát, a β_2) szerint:

$$T_2 = F\int_{h_f}^{h_a}\frac{dx_2}{q(x_2)} = \frac{3F}{2b\sqrt{2g}}\int_{h_f}^{h_a}\frac{dx_2}{(h_a-x_2)^{3/2}} = \frac{3F}{b\sqrt{2g}}\left[\frac{1}{h_a-x_2}\right]_{h_f}^{h_a}.$$

Improprius integrálunk divergens, azaz a *kiürítési idő elméletileg végtelen.* Tekintsük az edényt kiürítettnek, ha már csak egy *kicsiny* $\varepsilon = h_a - h_a^*$ *vastagságú vízréteg* van a nyílás alsó szintje felett; ekkor $(h_a - h_f = a$ jelöléssel) a kiürítési idő:

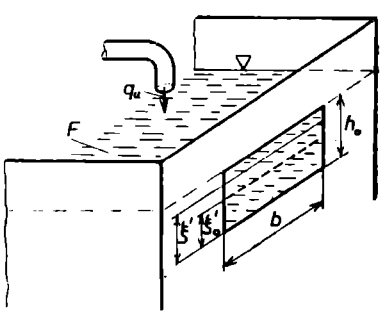
$$T_2 = \frac{3F}{b\sqrt{2g}}\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right).$$

Általában, ha a vízszint $x = h_f$-től valamely $\xi = h_a - \xi'$ szintig süllyed le, *a süllyedési idő*, a kifolyási tényezőt is figyelembe véve:

$$\tau = \frac{3F}{\mu b\sqrt{2g}}\left[\frac{1}{\sqrt{\xi'}} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right].$$

11. Valamely állandó F szelvényű *gyűjtőmedencébe*, amelynek oldalt b szélességű *négyszögletes kifolyónyílása* van, q_u tömegű víz folyik be időegységenként. A nyílás felső éle a vízszintbe esik.

Keresendő a t idő és az x' nyomómagasság közti összefüggés, vagyis kérdés, hogy hány (τ) másodperc alatt süllyed le a víznívó h_0-ról ξ'-re, és mekkora azon ξ_0' kiegyenlítődési magasság, amely mellett a kiömlő vízmennyiség éppen egyenlő a beömlő vízmennyiséggel. (Az x', ξ', ξ_0', h_0 a nyílás alsó szintjétől mérve; (181. ábra).



181. ábra

A felhasználandó differenciálegyenlet, a β_3) értelmében:

$$-F\,dx' = \frac{2}{3}\mu b\sqrt{2g}\,x'^{3/2}\,dt - q_u\,dt,$$

mert most $dx' < 0$.

Vezessük be az állandó tagra a

$$\frac{2}{3}\mu b\sqrt{2g} = k$$

jelölést; akkor:

$$q(x') = \frac{2}{3}\mu b\sqrt{2g}\,x'^{3/2} = kx'^{3/2},$$

és *differenciálegyenlet*ünk így alakul:

$$(q_u - kx'^{3/2})\,dt = F\,dx',$$

ahol a fentebb bevezetett jelöléssel:

$$q_u = k\xi_0'^{3/2}.$$

E ξ_0' nem más, mint a *kiegyenlítődési magasság*. Ezzel differenciálegyenletünk:

$$dt = \frac{F}{k}\,\frac{dx'}{\xi_0'^{3/2} - x'^{3/2}}.$$

Integrálra térve:

$$\int_0^{\tau} dt = \frac{F}{k}\int_{h_0}^{\xi'} \frac{dx'}{\xi_0'^{3/2} - x'^{3/2}}.$$

Alkalmazzuk az $x = u^2$ *helyettesítést*. Ezzel (a bal oldali integrálást elvégezve):

$$\tau = \frac{2F}{k}\int_{\sqrt{h_0}}^{\sqrt{\xi'}} \frac{u}{\xi_0'^{3/2} - u^3}\,du = \frac{2F}{k\xi_0'^{3/2}}\int_{\sqrt{h_0}}^{\sqrt{\xi'}} \frac{u}{1 - \left(\frac{u}{\sqrt{\xi_0'}}\right)^3}\,du.$$

További $t = \frac{u}{\sqrt{\xi_0'}}$ helyettesítéssel integrálunk így alakul:

$$\tau = \frac{2F}{k\xi_0'^{1/2}}\int_{\sqrt{\frac{h_0}{\xi_0'}}}^{\sqrt{\frac{\xi'}{\xi_0'}}} \frac{t}{1 - t^3}\,dt.$$

Felhasználva az A. IV. kt. 4. §. *c*) 95. o. 14. példájának eredményét:

$$\int \frac{t}{t^3 - 1}\,dt = \frac{1}{6}\ln\frac{(t-1)^2}{t^2 + t + 1} + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C,$$

a szóban forgó határozott *integrál értéke* tehát (figyelemmel az előjelre, és némi átalakítás után):

$$\tau = \frac{2F}{k\xi_0'^{1/2}}\left[\frac{1}{6}\ln\frac{(t-1)^3}{t^3-1} + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right]_{\sqrt{\frac{h_0}{\xi_0'}}}^{\sqrt{\frac{\xi'}{\xi_0'}}} =$$

$$= \frac{2F}{3k\xi_0'^{1/2}}\left\{\frac{1}{2}\ln\frac{\left(\sqrt{\frac{h_0}{\xi_0'}} - 1\right)^3}{\left(\sqrt{\frac{\xi'}{\xi_0'}} - 1\right)^3}\cdot\frac{\left(\sqrt{\frac{\xi'}{\xi_0'}}\right)^3 - 1}{\left(\sqrt{\frac{h_0}{\xi_0'}}\right)^3 - 1} + \right.$$

$$+\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2\sqrt{\frac{h_0}{\xi_0'}}+1}{\sqrt{3}}-\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2\sqrt{\frac{\xi'}{\xi_0'}}+1}{\sqrt{3}}\Bigg\}=$$

$$=\frac{F}{3k\xi_0'^{1/2}}\left[\ln\left(\frac{\sqrt{h_0}-\sqrt{\xi_0'}}{\sqrt{\xi'}-\sqrt{\xi_0'}}\right)^3\cdot\frac{\left(\sqrt{\xi'}\right)^3-\left(\sqrt{\xi_0'}\right)^3}{\left(\sqrt{h_0}\right)^3-\left(\sqrt{\xi_0'}\right)^3}+\right.$$

$$\left.+2\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{3\xi_0'}\left(\sqrt{h_0}-\sqrt{\xi'}\right)}{2\xi_0'+2\sqrt{h_0\xi'}+\sqrt{\xi'\xi_0'}+\sqrt{h_0\xi_0'}}\right].$$

(Az utolsó lépésben felhasználtuk az

$$\operatorname{arc\,tg}a-\operatorname{arc\,tg}b=\operatorname{arc\,tg}\frac{a-b}{1+ab}$$

azonosságot.)

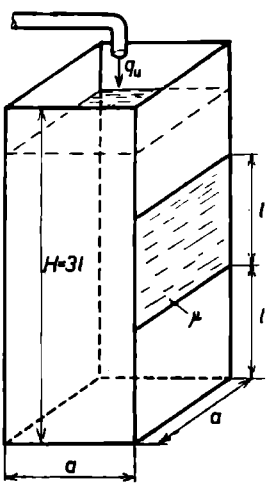
Látható, hogy e ritka, elemi úton megoldható esetben is az integrálás komoly nehézségekkel jár.

Ha $q_u=0$, vagyis *utánfolyás nincs*, akkor:

$$\tau=F\int_{h_0}^{\xi'}\frac{dx'}{0-kx'^{3/2}}=-\frac{F}{k}\int_{h_0}^{\xi'}x'^{-\frac{3}{2}}dx'=-\frac{F}{k}\left[\frac{x'^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\right]_{h_0}^{\xi'},$$

és k behelyettesítésével az ismert képletet nyerjük:

$$\tau=\frac{2F}{k}\left(\frac{1}{\sqrt{\xi'}}-\frac{1}{\sqrt{h_0}}\right)=\frac{3F}{\mu b\sqrt{2g}}\left(\frac{1}{\sqrt{\xi'}}-\frac{1}{\sqrt{h_0}}\right).$$



182. ábra

(Vö. a 10. példával.)

12. *Négyzetes hasáb alakú tartály* oldalfalán (a fenéktől számítva) l magasságban (a fal egész a szélességére kiterjedő) *téglalap alakú nyílás* van, melynek magassága l. A tartályt vízzel kívánjuk megtölteni, időegységenként állandó q_u beömlő víztömeggel.

Meghatározandó, hogy legalább mekkora q_u beömlő vízmennyiség esetén telhet meg a $H=3l$ magasságú tartály, továbbá, hogy mennyi idő szükséges a tartálynak a fenéktől számított l és $2l$ szintek közötti megtöltéséhez (182. ábra).

A tartály l és $2l$ szintek közötti megtöltésére szükséges idő meghatározására állítsuk fel a folytonossági egyenletet (a fenéktől számítva) x' vízoszlopmagasságnál, ahol $l<x'<2l$. Ekkor a nyíláson való kiömlés úgy tekinthető, mint *átbukás* (6. példa). Ennek megfelelően:

$$q(x')=\frac{2}{3}\mu a(x'-l)\sqrt{2g(x'-l)}.$$

A *folytonossági egyenlet* — a β_3)-mal összhangban — a következő alakú lesz:

$$[q_u - q(x')]\,dt = a^2\,dx',$$

(minthogy most $q_u > q(x')$ és így $dx' > 0$), illetve:

$$dt = \frac{a^2\,dx'}{q_u - \frac{2}{3}\mu a(x'-l)\sqrt{2g(x'-l)}}.$$

Ezt a $0 \leqq t \leqq T$, illetve az $l \leqq x' \leqq 2l$ szakaszon integrálva — a jobb oldalon $\sqrt{x'-l} = u$ helyettesítéssel — a következő eredményt kapjuk:

$$T = \frac{4{,}66a}{\mu\sqrt{2gl}}.$$

A *tartály csakis akkor telhet meg színig, ha a kiegyenlítődési szintmagasság nem kisebb az edény magasságánál,* azaz ha:

$$\xi_0 \geqq H = 3l,$$

vagy felülről mérve:

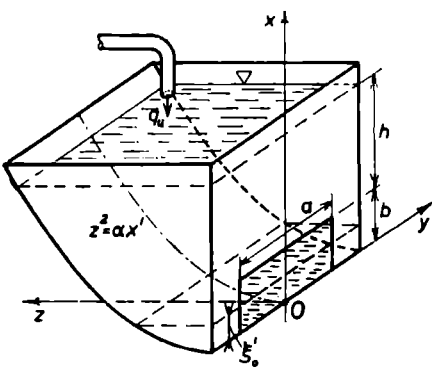
$$\xi_0 \leqq 0.$$

A β_2)-ben $q(x_1)$-re adott képlet, valamint ennek a 4. példában szereplő alkalmazása értelmében, a tartály színig töltéséhez *szükséges beömlés* (a felülről mért $h_a = 2l$, $h_f = l$; $\xi_0 = 0$ értékekkel):

$$q_u \geqq \frac{2}{3}\mu a\sqrt{2g}[(2l-0)^{3/2} - (l-0)^{3/2}],$$

vagyis:

$$q_u \geqq 1{,}22\mu a\sqrt{2g}\,l^{3/2}.$$



183. ábra

***13.** *Függőleges fal téglalap alakú nyílásán,* parabolikus henger alakú *(változó keresztmetszetű) tartályból változó vízszint és utánfolyás mellett kifolyó víz mennyisége** (183. ábra).

A kiömlés folyamata *két szakasz*ból áll. Az elsőben a víz felszíne az oldalnyílás felső széléig süllyed le T_1 idő alatt. A másodikban a folyamat olyan, mint a négyszögletes szelvényű bukógát esetében, és T_2 idő alatt süllyed le a víz tükre $\xi' \neq 0$ (alulról mért) szintig.

Az *első időszak*ban a kiömlési folyamat *differenciálegyenlete* (a fenéktől mért x' változóval, tekintettel a $dx' < 0$ körülményre):

$$-F(x_0')\,dx_1 = \frac{2}{3}\mu a\sqrt{2g}\,[x_1'^{3/2} - (x_1' - b)^{3/2}]\,dt - q_u\,dt,$$

összhangban a β_3)-mal és β_5)-tel. A kiürítés első időszaka tehát:

* L. *Kövesi:* Hidraulika, 100—104. o.

$$T_1 = \int_b^{H=b+h} \frac{F(x_1')\,dx_1}{\frac{2}{3}\mu a\sqrt{2g}\,[x_1'^{3/2} - (x_1'-b)^{3/2}] - q_u}.$$

A *második időszak*ban pedig:

$$-F(x_2')\,dx_2' = \frac{2}{3}\mu a x_2'\sqrt{2gx_2'}\,dt - q_u\,dt,$$

és integrálva:

$$T_2 = \int_{\xi'}^{b} \frac{F(x_2')\,dx_2}{\frac{2}{3}\mu a\sqrt{2g}\,x_2'^{3/2} - q_u}.$$

Ha éppen $\xi_2' = \xi_0$ (kiegyenlítődési magasság), akkor $T_2 = \infty$. Ezért T_2 csak olyan ξ_2' nyomómagassághoz határozható meg, mely $\xi_2' = \xi_0' + \varepsilon$, ahol ε tetszőlegesen kicsiny pozitív szám.

A tartály parabolikus henger alakú; vezérgörbéjének egyenlete: $z^2 = \alpha x'$. Keressük meg előbb a T_1 időt!

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\frac{2}{3}\mu a\sqrt{2g} = k, \qquad q_u = q_0 = \frac{2}{3}\mu a\sqrt{2g}\,\xi_0'^{3/2} = kc.$$

Legyen továbbá a tartály hossza l és vele $F(x) = lz = l\sqrt{\alpha x'}$. Az $(x-b)^{3/2}$-t *binomiális sor*ba fejtjük, 3 tagra szorítkozva. Ezeket beírva a *kifolyás első időszaká*nak T_1 *képletébe*, nyerjük:

$$T_1 = \frac{\sqrt{\alpha}l}{k} \int_b^{H=b+h} \frac{\sqrt{x_1'}\,dx_1}{x_1'^{3/2} - x_1'^{3/2} + \frac{3}{2}b\sqrt{x_1'} - \frac{3}{8}\frac{b^2}{\sqrt{x_1'}} - c} =$$

$$= \frac{\sqrt{\alpha}l}{k} \int_b^{H=b+h} \frac{\sqrt{x_1'}\,dx_1'}{\frac{3}{2}b\sqrt{x_1'} - \frac{3}{8}\frac{b^2}{\sqrt{x_1'}} - \frac{8c\sqrt{x_1'}}{8\sqrt{x_1'}}} = \frac{8l\sqrt{\alpha}}{k} \int_b^{H} \frac{x_1'\,dx_1'}{12bx_1' - 3b^2 - 8c\sqrt{x_1'}}.$$

Ezen integrál az

$$y = \sqrt{x_1'}, \qquad y^2 = x_1' \quad \text{és} \quad 2y\,dy = dx_1$$

helyettesítés után így alakul:

$$T_1 = \frac{16l\sqrt{\alpha}}{k} \int_{\sqrt{b}}^{\sqrt{H}=\sqrt{b+h}} \frac{y^3\,dy}{12by^2 - 3b^2 - 8cy}.$$

A számlálót a nevezővel elosztva és

$$\frac{16l\sqrt{\alpha}}{k}=\gamma$$

jelöléssel élve:

$$T_1=\gamma\int_{\sqrt{b}}^{\sqrt{H}=\sqrt{b+h}}\left(\frac{y}{12b}+\frac{c}{18b^2}+\frac{\frac{(18c^2+9b^3)y+6cb^2}{36b^2}}{12b\left[\left(y-\frac{c}{3b}\right)^2-\frac{9b^3+4c^2}{36b^2}\right]}\right)dy=$$

$$=\gamma\left\{\frac{1}{24b}\left[y^2\right]_{\sqrt{b}}^{\sqrt{H}}+\frac{c}{18b^2}\left[y\right]_{\sqrt{b}}^{\sqrt{H}}+\frac{1}{432b^3}\int_{\sqrt{b}}^{\sqrt{H}}\frac{(16c^2+9b^3)y+6cb^2}{\left(y-\frac{c}{3b}\right)^2-\frac{9b^3+4c^2}{36b^2}}dy\right\}.$$

Bevezetve a következő újabb jelöléseket:

$$16c^2+9b^3=m,\qquad \frac{c}{3b}=r,$$

$$6cb^2=n,\qquad \frac{9b^3+4c^2}{36b^2}=s,$$

integrálunk ilyen alakot ölt:

$$T_1=\gamma\left[\frac{1}{24b}(H-b)+\frac{c}{18b^2}(\sqrt{H}-\sqrt{b})+\frac{1}{432b^2}\int_{\sqrt{b}}^{\sqrt{H}}\frac{my+n}{(y-r)^2-s}dy\right].$$

Lévén

$$\int_{\sqrt{b}}^{\sqrt{H}}\frac{my+n}{(y-r)^2-s}dy=\frac{m}{2}\ln\left[(y-r)^2-s\right]_{\sqrt{b}}^{\sqrt{H}}-\left[\frac{n-mr}{\sqrt{s}}\operatorname{arth}\frac{y-r}{\sqrt{s}}\right]_{\sqrt{b}}^{\sqrt{H}},$$

végső *eredmény*ünk a kifolyás időtartamának első szakaszára ez lesz:

$$T_1=\gamma\left\{\frac{1}{24b}(H-b)+\frac{c}{18b^2}(\sqrt{H}-\sqrt{b})+\frac{1}{432b^3}\left[\frac{m}{2}\ln\frac{(\sqrt{H}-r)^2+s}{(\sqrt{b}-r)^2+s}\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{n-mr}{\sqrt{s}}\left[\operatorname{arth}\frac{\sqrt{b}-r}{\sqrt{s}}-\operatorname{arth}\frac{\sqrt{H}-r}{\sqrt{s}}\right]\right\}.$$

A feladat — mint látható — valóban nem oldható meg elemi úton. A T_1 számítása során az $(x-b)^{3/2}$ végtelen (binomiális) sorát vettük igénybe. Minthogy ennek csak 3 első tagját vettük figyelembe, a T_1-re *nyert eredmény* természetesen csak *közelítő pontosságú.*

Egyszerűbb *a kifolyás második szakaszá*ban a T_2 idő megállapítása. Ekkor ily módon:

$$\xi' < \xi_2 \quad \text{és} \quad z_2 = \alpha x_2'; \qquad F(x_2')\,dx_2' = \sqrt{\alpha x_2'}\,dx_2';$$

és

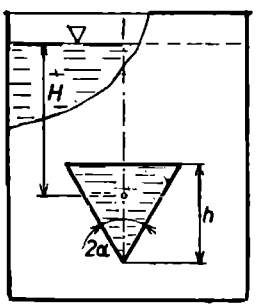
$$T_2 = \int_b^{\xi'} \frac{F(x_2')\,dx_2'}{q_u - k x_2'^{3/2}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{k} \int_b^{\xi'} \frac{\sqrt{x_2'}\,dx_2'}{c - x_2'^{3/2}}.$$

A $\sqrt{x_2'} = y$, $dx_2 = 2y\,dy$ helyettesítéssel nyerjük végül:

$$T_2 = \frac{2l\sqrt{\alpha}}{k} \int_{\sqrt{\xi'}}^{\sqrt{b}} \frac{y^2}{y^3 - c}\,dy = \frac{2l\sqrt{\alpha}}{3k} \left[\ln (y^3 - c) \right]_{\sqrt{\xi'}}^{\sqrt{b}} =$$

$$= \frac{2l\sqrt{\alpha}}{3k} \ln \frac{(\sqrt{b})^3 - c}{(\sqrt{\xi_2'})^3 - c}.$$

(Ilyen bonyolult számítások esetén előnyös *grafikus integrálás*hoz folyamodni.)



184. ábra

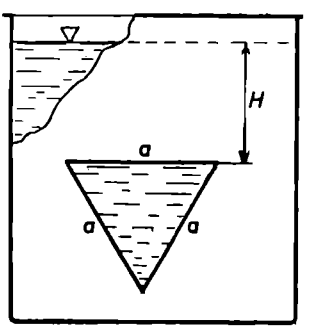
14. Egy *paralelepipedon alakú* és 100 cm² alapterületű *edény* színig tele van. Oldallapján keskeny *rés* található, melynek magassága 20 cm és szélessége 0,1 cm (178. ábra). Mekkora idő alatt csökken a vízszint *a)* 5 cm-rel, *b)* 10 cm-rel, *c)* 19 cm-rel és *d)* 20 cm-rel?

15. Az *edény* függőleges falában *h* magasságú *egyenlő szárú háromszög alakú* 2α csúcsszögű *nyílás* van.

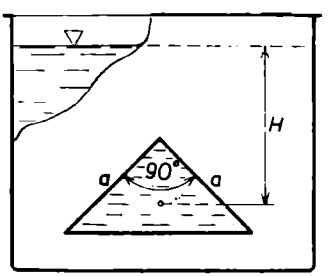
Meghatározandó a kiömlő folyadékmennyiség állandó vízszint esetén, amely a nyílás súlypontja felett *H* magasságban van (184. ábra).

16. Meghatározandó, hogy mennyi folyadék ömlik ki egy függőleges oldalfalon levő *szabályos háromszög alakú nyíláson* át.

A vízszint állandó $H = \frac{2ga\sqrt{3}}{2}$ magasságban van az egyenlő oldalú háromszög felső éle fölött. Az így nyert eredményt hasonlítsuk össze a kis nyílásra érvényes megoldással (185. ábra).



185. ábra



186. ábra

17. Hasáb alakú *edény* függőleges oldalfalában *egyenlő szárú, a* befogójú *derékszögű háromszög alakú nyílás* van. A nyílás súlypontja $H = 3\sqrt{2}a$ állandó mélységben van a felszín alatt (186. ábra).

Meghatározandó a kiömlő folyadék mennyisége.

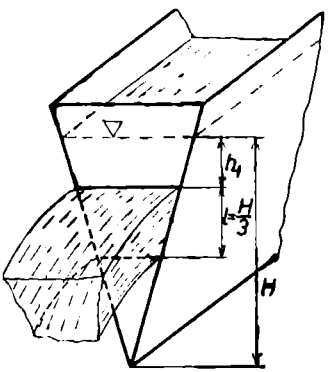
18. *Egyenlő szárú háromszög alakú fal*lal ellátott edényben $l = \frac{H}{3}$ magasságú *nyílás* készítendő a 187. ábrán megadott módon.

Hogyan kell a h_f távolságot megválasztani, hogy a kiömlő vízmennyiség a legnagyobb legyen? A vízszint állandó.

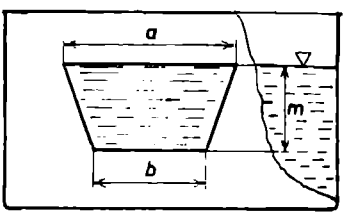
19. Igazoljuk, hogy a *tartály* függőleges falán levő, s a 188. ábrán feltüntetett *trapéz alakú nyílás*on időegységenként

$$q = \frac{2}{15}\mu(2a + 3b)m\sqrt{2gm}$$

térfogatú vízmennyiség ömlik ki, ha a tartálybeli víz felszínét állandóan a nyílás felső élével egy szintben tartjuk.



187. ábra



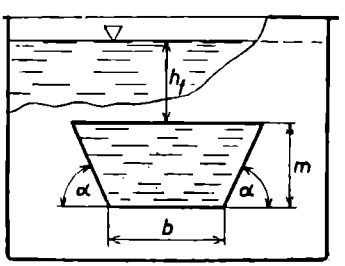
188. ábra

20. A kiömlés a *tartály* függőleges oldalfalán levő *trapéz alakú nyílás*on történik. A vízszint a trapéz felső oldala felett állandóan h_f magasságban van (189. ábra).

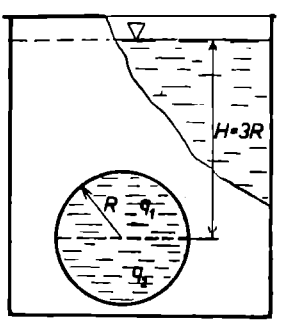
Meghatározandó a kiömlő folyadék mennyisége.

21. A folyadék egy hasáb alakú *edény* függőleges oldalfalán levő *kör alakú nyílás*on át folyik ki. A *nyílás* középpontja a felszín alatt $H = 3R$ mélységben van, és ezt állandó értéken tartjuk.

Meghatározandó, hogy mi az összefüggés a nyílásnak (a 190. ábrán szaggatott vonallal elválasztott) felső és alsó felén át kiömlő q_1 és q_2 vízmennyiség között.



189. ábra

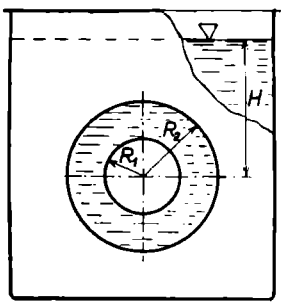


190. ábra

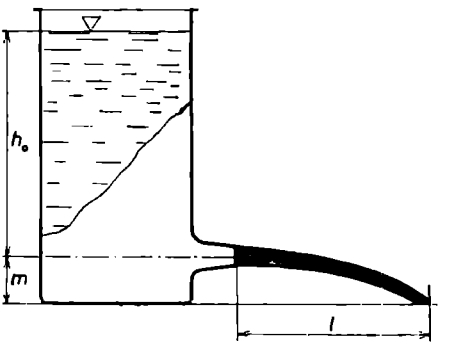
22. Egy *edény* függőleges oldalfalán levő *gyűrű alakú nyíláson* víz folyik ki. A gyűrűt R_1 és R_2 ($R_1 = 0{,}5R_2$) sugarú koncentrikus kör határolja; középpontjuk a vízszint alatt állandóan H mélységben van.

Keresendő a kiömlő vízmennyiségre vonatkozó közelítő képlet (191. ábra).

***23.** Meghatározandó, hogy milyen távolságra lövell ki a *vízsugár* a *konoid alakú nyílás*ból; $h_0 = 5$ m, $m = 1$ m (192. ábra).



191. ábra



192. ábra

γ **1.** Megállapítandó a *zsilipen kifolyó vízmennyiség* és a *közepes kifolyási sebesség*, a γ_2)-beli első esetet feltételezve, a következő adatok mellett:

$$a = 0{,}75 \text{ m}; \quad h_a = 2{,}2 \text{ m}; \quad h_f = 1{,}8 \text{ m}; \quad \mu = 0{,}64.$$

A víznek a zsilip előtti c áramlási sebességét most figyelmen kívül hagyva, *a nyílás vízhozama*, a γ_2) szerint:

$$q = \frac{2}{3}\mu a\sqrt{2g}\left[h_f^{3/2} - h_f^{3/2}\right] = \frac{2}{3}0{,}64 \cdot 0{,}75\sqrt{2 \cdot 9{,}81}\left[2{,}2^{3/2} - 1{,}8^{3/2}\right] = 1{,}213 \text{ m}^3/\text{s}.$$

A közepes kifolyási sebesség tehát:

$$v_k = \frac{q}{f} = \frac{1{,}213}{0{,}75 \cdot 0{,}4} = 4{,}04 \text{ m/s}.$$

2. Hasonló a feladatunk

$$a = 0{,}45 \text{ m}; \; h_a = 1{,}4 \text{ m}; \qquad h_f = 0{,}45 \text{ m}; \quad \mu = 0{,}6$$

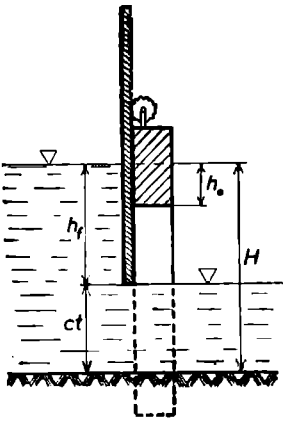
adatok mellett, de most a zsilip előtti $c = 1{,}2$ m/s áramlási sebesség is figyelembe veendő.

A γ_2) szerint:

$$q = \frac{2}{3}\mu a\sqrt{2g}\left[\left(h_a + \frac{c^2}{2g}\right)^{3/2} - \left(h_f + \frac{c^2}{2g}\right)^{3/2}\right] =$$

$$= \frac{2}{3}0{,}6 \cdot 0{,}45 \cdot 4{,}43\left[\left(1{,}4 + \frac{1{,}2^2}{2 \cdot 9{,}81}\right)^{3/2} - \left(0{,}45 + \frac{1{,}2^2}{2 \cdot 9{,}81}\right)^{3/2}\right] = 1{,}01 \text{ m}^3/\text{s}.$$

3. A 193. ábrán vázolt *zsilipet egyenletes c sebességgel felvonjuk*, a teljes zárási helyzetétől ($h_f = h_a = H$) a teljes nyitási helyzetig ($h_f = h_0$), miközben a *vízszint* (a zsilip előtt) *állandó*. Kérdés, időközben mekkora vízmennyiség ömlik ki az *a* szélességű nyíláson.



193. ábra

A β_1) szerint a t időpontban a $h_a = H$, $h_f = H - ct$ jellemzőjű téglalap alakú oldalnyíláson a $(t, t + dt)$ *elenyésző időközben*

$$dQ = q(t)\,dt = \frac{2}{3}\mu a\sqrt{2g}\,(H^{3/2} - h^{3/2})\,dt$$

vízmennyiség ömlik ki. *A zsilip felvonása közben kiömlő egész vízmennyiség* lévén:

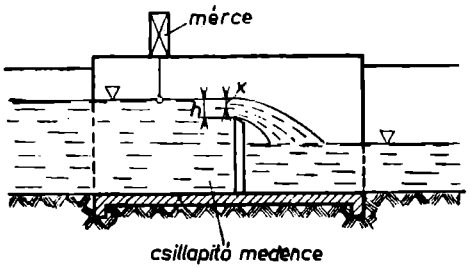
$$dt = -\frac{dh_f}{c} \quad \text{és} \quad H \geqq h_f \geqq h_0,$$

így adódik:

$$Q_0 = \int_0^{q_0} dQ = -\frac{2\mu a\sqrt{2g}}{3c}\int_H^{h_0}(H^{3/2} - h^{3/2})\,dh_f =$$

$$= \frac{2\mu a\sqrt{2g}}{3c}\left[H^{3/2}h_f - \frac{2}{5}h_f^{5/2}\right]_{h_0}^{H} =$$

$$= \frac{2\mu a\sqrt{2g}}{15c}(3H^{5/2} - 5H^{3/2}h_0 + 2h_0^{5/2}).$$



194. ábra

4. A 194. ábra *derékszögű négyszög keresztmetszetű medencébe beépített* úgynevezett *Bazin-bukót* ábrázol.* A 194. ábrán az átbukó vízréteg keresztmetszetét is látjuk, amelyből láthatólag a duzzasztott vízszint a gátkorona felett h magasságban van. E vízszint alatt x mélységben levő dx vastagságú *elemi vízréteg*, teljes b szélességében, a *Torricelli*-formula szerint, az x vízoszlopmagasságnak megfelelő $\sqrt{2gx}$ sebességgel folyik ki. Az elemi vízsáv keresztmetszeti területe $b\,dx$, a rajta időegységenkénti átfolyó vízmennyiség (elméletileg):

$$dq = \sqrt{2gx}\,b\,dx.$$

A teljes h vízrétegnek megfelelő *vízszállítást* pedig a

$$q = \int_0^h \sqrt{2gx}\,b\,dx = \frac{2}{3}b\sqrt{2g}\,h^{3/2}$$

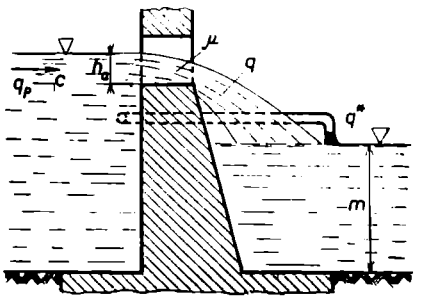
* L. *Németh:* Hidrológia.

kifejezés szolgáltatja. A kontrakció miatt ezt az értéket még a μ kiömlési tényezővel kell szoroznunk. Ezzel:

$$q = \frac{2}{3}\mu b\sqrt{2g}\,h^{3/2}.$$

[Vö. β) 2. példával; az ottani h_a-nak itt h felel meg, az ottani h_f-nek pedig 0.]

5. Egy patakban, melynek szélessége $s = 5$ m átlagos mélysége 1 m, vízhozama $q_p = 1200$ l/s (közepes vízállás mellett), $a = 4$ m széles *bukógát*at építünk; koronája a normális vízállás felett van, tehát tökéletes bukógát. Mekkora lesz a *duzzasztás* a bukógát koronája felett, ha az átbukás előtt oldalcsatornán $q^* = 200$ l/mp vizet elvezetünk. A $\mu = 0{,}57$ kifolyási tényezővel számoljunk! (195. ábra.)



195. ábra

A patak *közepes sebessége:*

$$c = \frac{q_p}{F} = \frac{1{,}2}{5 \cdot 1} = 0{,}24 \text{ m/s}.$$

A *vízhozam* γ_3)-beli

$$q = \frac{2}{3}\mu a\sqrt{2g}\left[\left(h_a + \frac{c^2}{2g}\right)^{3/2} - \left(\frac{c^2}{2g}\right)^{3/2}\right]$$

formulájában most

$$q = q_p - q^* = 1{,}2 - 0{,}2 = 1{,}0 \text{ m}^3/\text{s},$$

és a h_a az ismeretlen.

A zárójelbeli $-\left(\frac{c^2}{2g}\right)^{3/2}$ tagot elhanyagolva

$$\left[\text{mert várhatólag } \left(h_a + \frac{c^2}{2g}\right)^{3/2} \gg \left(\frac{c^2}{2g}\right)^{3/2}\right],$$

kapjuk:

$$1{,}0 = \frac{2}{3}\,0{,}57 \cdot 4\sqrt{2 \cdot 9{,}81}\left(h_a + \frac{0{,}24^2}{2 \cdot 9{,}81}\right)^{3/2},$$

ahonnan a keresett *duzzasztás:*

$$h_a = \sqrt[3]{\frac{9}{\left(2 \cdot 0{,}57 \cdot 4\sqrt{2 \cdot 9{,}81}\right)^2}} - \frac{0{,}24^2}{2 \cdot 9{,}81} = 0{,}135 \text{ m}.$$

6. A 196*a*. ábrán szemlélhető *bukógát nyílása parabola alakú.* A nyílás mélypontja felett a vízréteg vastagsága h_0. Megállapítandó a kiömlő vízmennyiség, a bukógáthoz érkező víz c sebességének figyelembevételével. (Az átbukás láthatóan tökéletes).

A nyílás peremgörbéjének egyenlete:

$$y = \sqrt{2ph'}.$$

A csatorna vízszintjét és keresztmetszetét állandónak tekintve, *kiömlő vízmennyiség* — a h-kat a nyílás mélypontjától mérve, a $H = h_0 + \frac{c^2}{2g}$ mellett a $\frac{c^2}{2g}$-t elhanyagolva, továbbá a

$h = H - h'$ körülményt figyelembe véve — *a* γ_3*)* értelmében így alakul:

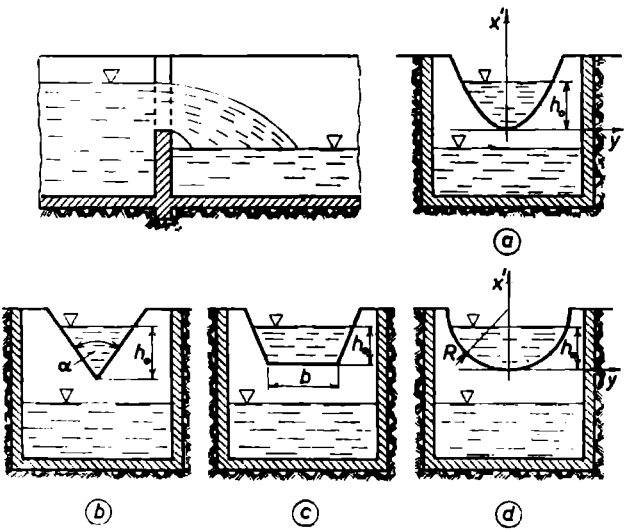
$$q_2 = 2\mu\sqrt{2g}\int_0^H y(h')\sqrt{h_0 - h'}\,dh =$$

$$= 4\mu\sqrt{gp}\int_0^H \sqrt{h'(H-h')}\,dh' = 4\mu\sqrt{gp}\int_0^H \sqrt{2\frac{H}{2}h' - h'^2}\,dh' = 4\mu\sqrt{gp}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{H}{2}\right)^2\pi$$

[ui. az integrál — faktor nélkül — az $y^2 + \left(h' - \frac{H}{2}\right)^2 = \left(\frac{H}{2}\right)^2$, illetve $y = \sqrt{Hh' - h'^2}$ egyenletű kör felének területe]. Ezzel:

$$q_2 = \frac{\pi\mu\sqrt{gp}}{2}H^2,$$

ahol $H = h_0 + \frac{c^2}{2g}$.



196. ábra

7. Meghatározandó a 196*b*. ábrán vázolt (vékony falú) *bukógát háromszög alakú nyílásán* az időegység alatt kiömlő víz mennyisége; $\alpha = 90°$ és $h_0 = 1$ m.

8. Meghatározandó a 196*c*. ábrán vázolt (vékony falú) *bukógát trapéz alakú nyílásán* az időegység alatt kifolyó vízmennyiség; $h_0 = 1{,}2$ m; $b = 2$ m; $\alpha = 60°$; $\mu = 0{,}6$.

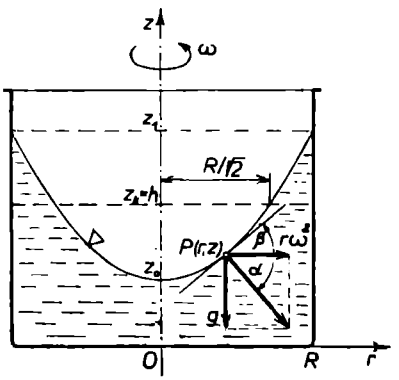
9. Állapítsuk meg közelítő formula segítségével a 196*d* ábrán látható *bukógát körív alakú nyílásán* kiömlő vízmennyiséget; $R = 1$ m; $h_0 = 0{,}5$ m.

c) Egyéb hidromechanikai alkalmazások

α) A folyadékfelszín alakja forgó tartályban

α_1*)* A hidromechanika tanítása szerint (homogén) *folyadék stabilis egyensúlyi helyzetbe csak ún. potenciálos erők hatása alatt lehet.* (Ekkor a tömegegységre ható ún. térerősség **g** vektora mint az $U = -\frac{1}{\varrho}p + C$ potenciál negatív gradiense állítható elő.)* Az állandó potenciálú, ún. ekvipotenciális felületek tehát egyúttal állandó

* L. bővebben pl. *Grúber—Blahó* i. m.-ben; a B. III. kötetben.



197. ábra

nyomású, ún. izobár felületek is, s ezek normálisai (a gradiens fogalmának megfelelően) éppen a térerősségi vektorok. Más szóval *az ekvipotenciális felületek, mint pl. a szabad felszín is, merőlegesek a pontjaikban ható térerősségi vektorokra.*

α_2) Ezek alapján *a függőleges tengely körül forgó tartályban a szabad felszín valamely r, z hengerkoordinátájú pontjában* a meridiángörbe érintője merőleges az ottani térerősségi vektorra. Ez utóbbinak mint a tömegegységre ható g súlyerő és $r\omega^2$ centrifugális erő *eredőjének iránytangense* (197. ábra):

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{g}{r\omega^2},$$

ahol ω a tartály és a folyadék közös, állandó szögsebessége. Következésképpen az ismeretlen $z = z(r)$ egyenletű *meridiángörbe érintőjének iránytangense* az említett helyen:

$$\frac{dz}{dr} = \operatorname{tg}\beta = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = +\frac{r\omega^2}{g}.$$

A meridiángörbe egyenlete tehát:

$$\int_{z_0}^{z} d\zeta = \frac{\omega^2}{g}\int_0^r \varrho\, d\varrho, \quad \text{azaz} \quad z = z_0 = \frac{\omega^2 r^2}{2g},$$

vagy:

$$\int_{z}^{z_1} d\zeta = \frac{\omega^2}{g}\int_r^R \varrho\, d\varrho, \quad \text{azaz} \quad z = z_1 - \frac{\omega^2}{2g}(R^2 - r^2),$$

ahol $z(0) = z_0$, $z(R) = z_1$. *A szabad felszín* tehát *forgási paraboloid. A folyadék térfogata* forgás közben:

$$V = \int_0^R z(r)\cdot 2r\pi\, dr = z_0 R^2\pi + \frac{\omega^2\pi}{g}\int_0^R r^3\, dr = R^2\pi\left(z_0 + \frac{\omega^2 R^2}{4g}\right),$$

ahol

$$h = z_0 + \frac{\omega^2 R^2}{4g}$$

nyilván *a nyugalomban levő vízoszlop magassága;* egyszersmind láthatóan:

$$h = z\left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right) = \frac{z_0 + z_1}{2} = z_k,$$

vagyis másként:

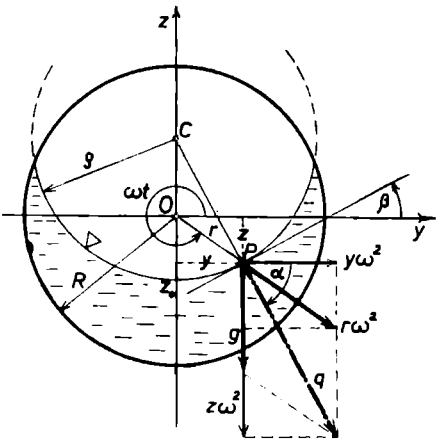
$$h = z_1 - \frac{\omega^2 R}{4g}.$$

A h, ω és R ismeretében z_0 és z_1 kiszámítható. A fentebbiek alapján számos érdekes gyakorlati feladat megoldható,

$\alpha_3)$ Vizsgáljuk most *a vízszintes tengely* (x) *körül forgó tartályban a szabad felszín alakját.* A $P(0, y, z)$ pontbeli térerősségnek mint a tömegegységre ható g súlyerő és $r\omega^2$ centrifugális erő q *eredőjének irányintangense* a 198. ábra szerint:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{r\omega^2 \sin\omega t - g}{r\omega^2 \cos\omega t} = \frac{z\omega^2 - g}{y\omega^2},$$

ahol ω a tartály és a folyadék közös, állandó szögsebessége. A szabad felszín ismeretlen $F(y, z) = 0$ egyenletű *profilgörbéje érintőjének irányintangense* tehát az említett pontban:



198. ábra

$$\frac{dz}{dy} = \operatorname{tg}\beta = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{y\omega^2}{g - z\omega^2}.$$

A profilgörbe egyenlete tehát, ha $z(0) = z_0$, így alakul:

$$\int_{z_0}^{z} (g - \zeta\omega^2)\, d\zeta = \int_{0}^{y} \eta\omega^2\, d\eta,$$

azaz

$$g(z - z_0) - \frac{\omega^2}{2}(z^2 - z_0^2) = \frac{\omega^2}{2} y^2,$$

vagy átalakítva:

$$y^2 + \left(z - \frac{g}{\omega^2}\right)^2 = \left(z_0 - \frac{g}{\omega^2}\right)^2.$$

A szabad felszín profilgörbéje tehát $C\left(0, 0, \frac{g}{\omega^2}\right)$ középpontú és $\varrho = \left| z_0 - \frac{g}{\omega^2} \right|$ sugarú *kör.*

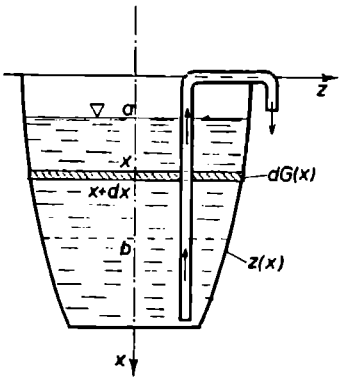
Láthatóan $\omega \to 0$ esetén a szabad felszín nyugalmi síkjához tart; ha pedig $\omega \to \infty$, akkor $C \to 0$ és $\varrho \to |z_0|$. A forgó és nyugalmi víz térfogata, következésképpen keresztmetszete is egyenlő. E követelmény, valamint az ω és R ismerete alapján kiszámítható a C, a z_0 és a ϱ.

A gyakorlatban eredményeink a *vízikerekeknél, turbináknál* stb. nyernek felhasználást.

$\beta)$ Folyadék kiszivattyúzása tartályból

A tartály legyen egy $z = z(x)$ meridiángörbének a függőleges x tengely körüli megforgatásával képzett *forgásfelület;* a z tengely essék az edény felső peremének a síkjába (199. ábra).

Kérdés, *mekkora munkát igényel az* $a \leqq x \leqq b$ *homogén folyadékréteg kiszivattyúzása az edény felső peremének szintjén,* vagy másként: az említett rétegbeli folyadékmennyiség felemelése az edény felső peremének szintjére.



199. ábra

A mechanikában — amint ismeretes — a végzett munka nagyságát állandó P erő és (irányába eső) s elmozdulás esetén az $L = Ps$ szorzat szolgáltatja. Ha viszont a P erő közben változik, akkor — amint láttuk — az $L = \int_{s_1}^{s_2} P\,ds$ integrál tájékoztat a végzett munkáról.

A munka differenciálját úgy nyerjük, mintha az $[x, x+dx]$ folyadékréteg állandó $z^2(x)\pi$ keresztmetszetű, és így $z^2(x)\pi\,dx\gamma$ súlyú lenne, továbbá mintha e folyadéktárcsa minden keresztmetszetét egyaránt x egységgel kellene felemelni; azaz (pl. $dx > 0$ esetén):

$$dL = -dG \cdot (-x) = +\pi\gamma z^2(x)x\,dx > 0,$$

minthogy a súly ellenében működő erő és az elmozdulás egyaránt felfelé (a $-x$ tengely felé) irányul.

A kérdezett munka tehát (a $dx > 0$-nak megfelelően):

$$L = \gamma\pi \int_a^b z^2(x)x\,dx = \frac{\gamma}{\delta} M_z(a, b) = gmx_s = Gx_s.$$

Eredményünk láthatóan *arányos az említett folyadékréteg tömegének mint forgástestnek az edény felső peremének síkjára* (az $x = 0$ síkra) *vonatkozó elsőrendű nyomatékával.* Az arányossági tényező éppen a $\frac{\gamma}{\delta} = g$; a kérdezett munka tehát éppen *egyenlő a folyadékréteg súlyának és súlyponti koordinátájának szorzatával.*

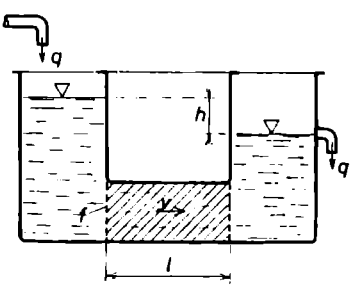
γ) Víz áramlása a talajban. Kút vízhozama

γ_1) A talajvíz áramlása (ugyanúgy, mint általában a folyadéké) lehet lamináris és turbulens. *Ehrenberg* vizsgálatai szerint $v < 3 \sim 4$ m/s *sebességek mellett a talajvíz áramlása gyakorlatilag lamináris.*

Darcy, a 200. ábrán vázolt berendezésben vizsgálódva, *azt találta, hogy a lamináris talajvízáramlás v sebessége a vízszint I* (viszonylagos) *esésével arányos:*

$$v = kI,$$

ahol k az ún. *áteresztőképességi együttható*. Az említett berendezésben az l hosszúságú talajprizma mentén a vízszint (viszonylagos) esése: $I = \frac{h}{l}$, a k-ra pedig a $v = kI = \frac{q}{f}$ egyenlőség alapján a $k = \frac{q}{lf}$ elméleti érték adódik.



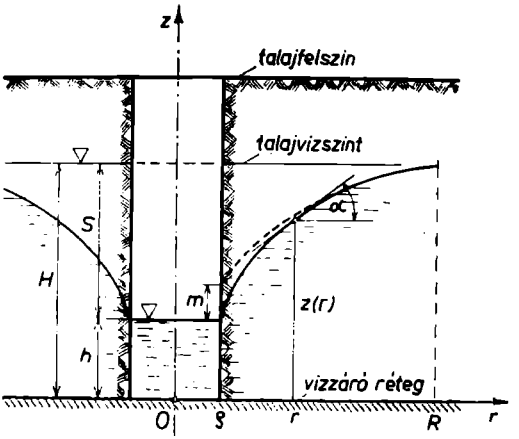
200. ábra

Turbulens talajvízmozgás esetén a

$$v = \alpha\sqrt{I}$$

Chézy-képlet érvényes.

γ_2) A fentebb említett *Darcy-törvény fontos szerepet játszik a kutak vízhozamának számításánál.** Aknát fúrva a talajba (pl. ún. teljes kút esetén az ún. vízzáró rétegig), a talajvíz szintje a kút közelében leszáll. Homogén talajban a talajvíz eredetileg sík felszíne a kút tengelye körül *forgásfelület* alakú lesz. Ez utóbbi meridiángörbéjét *depresszió- (leszívási) vonal*nak nevezik; (egyelőre ismeretlen) egyenlete a 201. ábrán látható koordináta-rendszerben $z = z(r)$ alakú. Valamely r sugarú kör mentén a vízszint (helyi, viszonylagos) esése a depressziógörbe r abszcisszájú pontjához tartozó érintő $z'(r)$ iránytgével egyenlő. Ennélfogva *valamely r sugarú és z magasságú körhenger palástján* (201. ábra) a *Darcy-törvény szerint elméletileg*



201. ábra

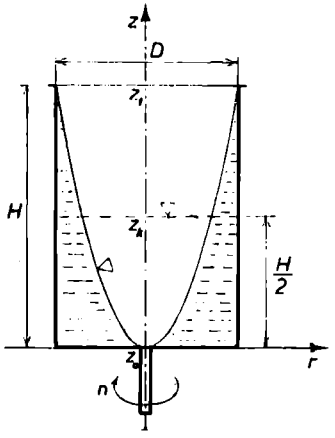
$$q = F(r)\, v(r) = 2r\pi\, z(r) \cdot kz'(r),$$

illetve

$$q = 2\pi k r \frac{dz}{dr} z$$

térfogatú vízmennyiség áramlik át az időegység alatt a kútakna felé. A folytonosság tétele értelmében e vízmennyiség állandó minden r-re, amelyre $\varrho \leqq r \leqq R$.

A kútból a valóságban időegység alatt kivehető vízmennyiség e q elméleti értéknél kisebb, minthogy a tényleges depressziógörbe meredeksége s vele együtt a beáramlás sebessége a kút közelében kisebb az elméleti értéknél. Erre jellemző az 201. ábrabeli *m* magasság, az ún. *kútellenállás.*



202. ábra

Értelemszerűen hasonló megfontolással számítjuk pl. az *árvédelmi töltés*en a mentett oldalra átszivárgó vízmennyiséget.

További részletek tekintetében a példákra utalunk.

Példák és feladatok

α | **1.** Egy $D = 4$ cm átmérőjű és $H = 10$ cm magasságú *körhenger alakú edény* félig vízzel van megtöltve.

Mekkora fordulatszámmal kell az edényt *függőleges* geometriai tengelye körül forgatni ahhoz, hogy a víz éppen az edény pereméig emelkedjék? (202. ábra.)

* *Németh:* Ivóvizellátás.-

A nyugalomban levő víz köbtartalma:

$$V = R^2\pi \frac{H}{2};$$

ez nyilván egyenlő a forgó víz köbtartalmával.

A *forgásparaboloid-felület meridiángörbéjének* egyenlete az α_2) szerint:

$$z = z_1 - \frac{\omega^2}{2g}(R^2 - r^2), \quad \text{ahol most} \quad z_1 = m.$$

A forgó víz köbtartalma:

$$V = \int_0^R z(r) \cdot 2r\pi \, dr = R^2\pi\left(H - \frac{\omega^2 R^2}{2g}\right) +$$

$$+ \frac{\omega^2\pi}{g}\int_0^R r^3 \, dr = R^2\pi\left(H - \frac{\omega^2 R^2}{4g}\right).$$

A két térfogatot *egyenlővé téve*, nyerjük:

$$R^2\pi\frac{m}{2} = R^2\pi\left(H - \frac{\omega^2 R^2}{4g}\right), \quad \text{azaz} \quad \frac{H}{2} = \frac{\omega^2 R^2}{4g},$$

ahonnan:

$$\omega = \frac{\sqrt{2gH}}{R} = \frac{\sqrt{2 \cdot 981 \cdot 10}}{2} = 70\ \mathrm{s}^{-1}.$$

és így a kérdezett *fordulatszám:*

$$n = \frac{30\omega}{\pi} = 670 \text{ ford/perc.}$$

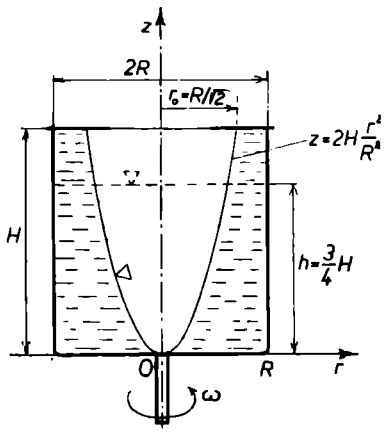
2. Egy *zárt, körhenger alakú, H* magasságú és *D* átmérőjű *tartály* magasságának $\frac{3}{4}$ részéig folyadékkal van megtöltve. Mekkora szögsebességgel kell a tartályt függőleges tengelye körül forgatni, hogy a folyadék szabad felszíne éppen érintse a tartály fenekét (203. ábra)?

3. A 204. ábrán vázolt, vízzel telt *veder* az *x* tengely körül *függőleges* (*y*, *z*) *síkban* forog. Az *O* pont és a vízfelszín távolsága *R*, a veder mélysége *h*. Meghatározandó ω szögsebességnél a veder fenékre ható *p* nyomás, továbbá azon legkisebb *n* fordulatszám, melynél a víz már nem ömlik ki a vederből.

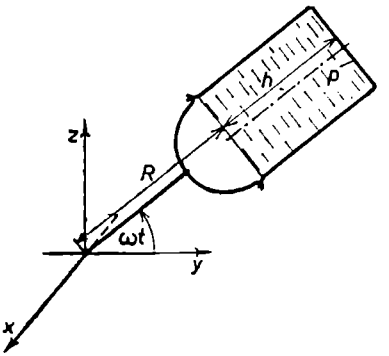
4. A 205. ábrán vázolt *kōrhenger alakú, R* sugarú, *H* magasságú *edény*t egyenletes *n* fordulatszámmal forgatjuk függőleges tengelye körül. Kérdés, menńyi folyadékot lehet tartani az edényben?

5. A 206. ábrán feltüntetett *repülőgép* vízszintes síkban $R = 400$ m sugarú kanyart ír le, miközben szárnya a vízszintessel $\alpha = 45°$-os szöget zár be. Mekkora *v* sebességgel kell a gépnek haladnia, hogy a tartálybeli *benzin* felszíne párhuzamos legyen a szárny síkjával?

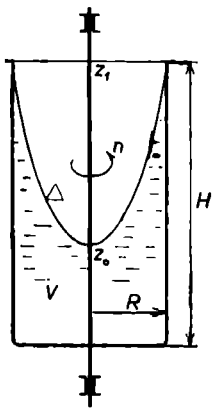
6. A 207. ábrán feltüntetett *a* élű, *kocka alakú edények*et függőleges tengely körül, *R* sugarú kör mentén forgatjuk. Meghatározandó azon *n* fordulatszám, amelynél az edények tengely felőli oldallapját a folyadék már nem érinti, míg a szemközti lapokat teljesen ellepi.



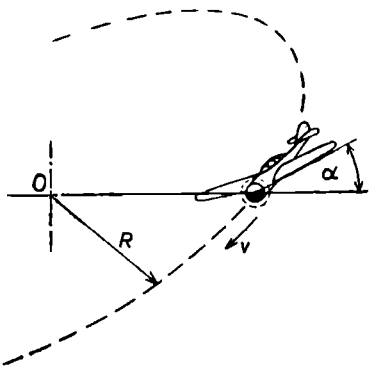
203. ábra



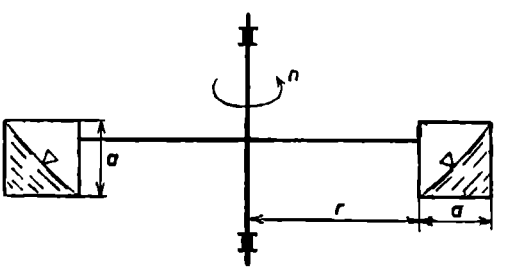
204. ábra



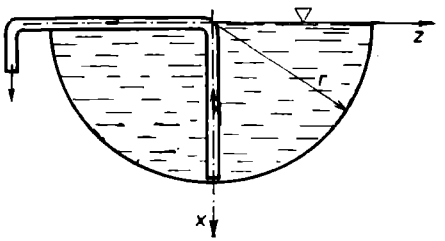
205. ábra



206. ábra



207. ábra



208. ábra

β | **1.** Egy r sugarú, *félgömb alakú tartály*ból mekkora munkával lehet kiszivatytyúzni a vizet, ha a tartály színig (főköréig) tele van (208. ábra).

Ez esetben $z = z(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, ahol $0 \leqq x \leqq r$. A megadott képlet szerint tehát:

$$L = \pi\gamma \int_0^r (r^2 - x^2)x\,dx =$$

$$= \frac{\pi}{2}\gamma \int_r^0 (r^2 - x^2)(-2x\,dx) = \frac{\pi}{4}\gamma \left[(r^2 - x^2)^2\right]_r^0 = \frac{\pi^4 r}{4}\gamma = \frac{2r^3\pi\gamma}{3} \cdot \frac{3r}{8} = G\frac{3r}{8}.$$

E munka láthatóan *megegyezik a súlypontjában* $\left(x_s = \frac{3}{8}r\right)$ *koncentrálva képzelt víz-mennyiségnek a felszínre való emeléséhez szükséges munkával.*

2. Mekkora munkával lehet kiszivattyúzni a vizet egy r alapkörsugarú, h magasságú, csúcsával lefelé mutató, színig telt *egyenes körkúp alakú tartály*ból.

Most $z = z(x) = r - \frac{r}{h}x$, ahol $0 \leqq x \leqq h$. Ezzel a szükséges *munka:*

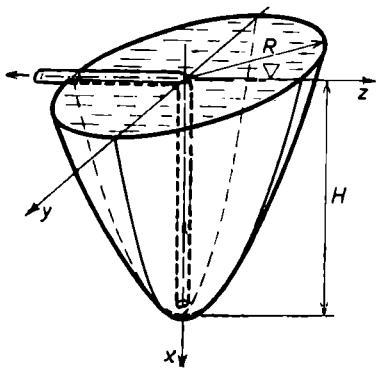
$$L = \pi\gamma \int_0^h r^2\left(1 - \frac{x}{h}\right)^2 x\,dx = \pi\gamma r^2 \int_0^h \left(x - \frac{2x^2}{h} + \frac{x^3}{h^2}\right)dx = \pi\gamma r^2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3h} + \frac{x^4}{4h^2}\right]_0^h =$$

$$= \frac{r^2\pi h^2\gamma}{12} = \gamma\frac{r^2\pi h}{3} \cdot \frac{h}{4} = G\frac{h}{4} = Gx_s.$$

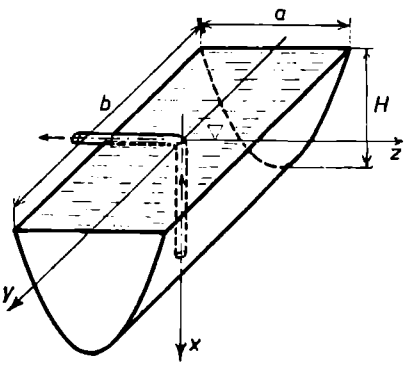
3. Mekkora munkát végzünk akkor, amikor kiszivattyúzzuk a vizet egy *körhenger alakú víztartó*ból, melynek magassága $H = 5$ m és alapkörének sugara $R = 3$ m?

4. Mekkora munkát kell végezni ahhoz, hogy egy γ fajsúlyú folyadékot egy alaplapjával lefelé fordított *kúp alakú*, H magasságú, R alapkörsugarú *tartóedény*ből kiszivattyúzzunk?

5. Egy *forgási paraboloid alakú üst* fedőkörének sugara $R = 2$ m, mélysége $H = 4$ m (209. ábra). Az üst $\gamma = 0{,}8$ p/cm^3 fajsúlyú folyadékkal van megtöltve. Mekkora munkát kell végezni ahhoz, hogy a folyadékot az üstből kiszivattyúzzuk?



209. ábra



210. ábra

6. Mekkora munkát kell végezni ahhoz, hogy kiszivattyúzzuk a vizet egy teknőből, melynek méretei (210. ábra): $a = 0{,}75$ m, $b = 1{,}2$ m, $H = 1$ m. A teknőt határoló felület *parabolikus henger*.

γ

1. SZABAD FELSZÍNŰ KÚT VÍZHOZAMA*

A 201. ábra egy (teljes) kút közelében kialakuló *depresszió-* (leszívási) *görbét* ábrázol. A talajvíz egy r sugarú és z magasságú *hengerpaláston* keresztül, *Darcy* törvénye szerint $v(r) = kz'(r)$ sebességgel áramlik a kút felé. A kút vízhozama tehát:

$$q = Fv = 2r\pi zk\,\frac{dz}{dr}.$$

Szétválasztva és integrálva a kútakna ϱ sugarától a tápkör R sugaráig, illetve a kútbeli h vízoszlopmagasságtól a tápkör pereme menti H talajvízréteg-vastagságig, nyerjük:

$$\int_{\varrho}^{R}\frac{dr}{r} = \frac{2k\pi}{q}\int_{h}^{H} z\,dz,$$

$$\ln\frac{R}{\varrho} = \frac{k\pi}{q}(H^2 - h^2).$$

Figyelembe véve, hogy $H = h + s$, a kút keresett *elméleti vízhozama* így alakul:

$$q = \frac{k\pi}{\ln\dfrac{R}{\varrho}}(2Hs - s^2).$$

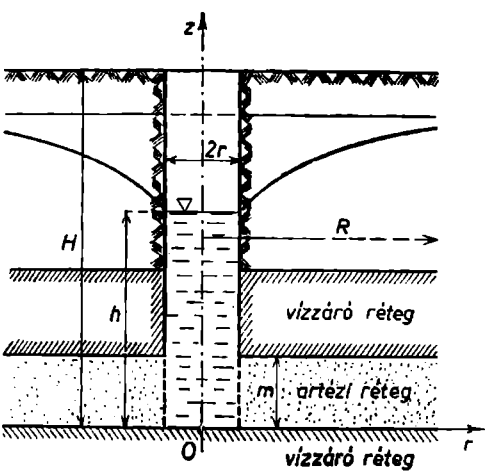
2. NYOMÁS ALATTI (ARTÉZI) KÚT VÍZHOZAMA**

A 211. ábrán látható m vastagságú vízréteg a fölötte levő (árnyékolt) vízzáró réteg nyomása alatt áll. A beáramlás most valamely r sugarú és m = konstans magasságú *hengerpalást* mentén *Darcy* törvénye szerint $v(r) = kz'(r)$ sebességgel megy végbe. Ezzel a kútba időegységenként beáramló (s onnan kivehető) vízmennyiség elméletileg

$$q = Fv = 2r\pi mk\,\frac{dz}{dr}.$$

Szétválasztva és integrálva:

$$\int_{r}^{R}\frac{dr}{r} = \frac{2k\pi m}{q}\int_{h}^{H} dz,$$



211. ábra

* L. *Németh:* Ivóvízellátás.
** L. *Németh:* Ivóvízellátás.

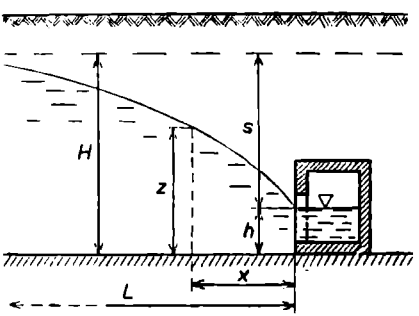
$$\ln\frac{R}{r}=\frac{2k\pi m}{q}(H-h).$$

Figyelembe véve, hogy $H=h+s$, a kútból *elméleti*leg kivehető *vízmennyiség:*

$$q=\frac{2mk\pi}{\ln\frac{R}{r}}s.$$

3. GALÉRIA VÍZHOZAMÁNAK MEGHATÁROZÁSA*

A 212. ábra egy, az ivóvízellátás céljait szolgáló ún. *galéria* keresztmetszetét ábrázolja. Ennek másodpercenkénti *vízhozamát*, a q-t kell meghatároznunk. A víz hozzáfolyása egy, az ábra síkjára merőleges l hosszúságú és z magasságú síkon keresztül történik v sebességgel.



212. ábra

Darcy törvénye alapján $v=k\frac{dz}{x}$. Ezzel:

$$q=Fv=zlk\frac{dz}{dx}.$$

Szétválasztva és integrálva:

$$\int_0^L dx=\frac{lk}{q}\int_h^H z\,dz;$$

$$L=\frac{lk}{2q}(H^2-h^2).$$

Figyelembe véve, hogy $H=h+s$, lesz végül a keresett *vízhozam:*

$$q=\frac{lk}{2L}(2Hs-s^2).$$

4. ÁRVÉDELMI TÖLTÉSEN ÁTSZIVÁRGÓ VÍZMENNYISÉG MEGHATÁROZÁSA**

A 213. ábrán látható *árvédelmi töltés*sel szemben az a kívánalom, hogy az azon átszivárgó víz *depressziógörbéje* még a maximális h_1 magasságú árvíz esetén is legfeljebb csak h_2 magasságban messe a mentett oldal rézsűjét. Feladatunk a depressziógörbe és az átszivárgó vízmennyiség meghatározása.

Vizsgálatunkat 1 fm szélességre végezzük. A koordináta-rendszert a 213. ábrán feltüntetett módon felvéve, az átszivárgó víz mennyisége:

$$q=Fv=lz\cdot v.$$

Az x helyen a sebesség:

$$v=kI=-k\frac{dz}{dx}\,(>0)$$

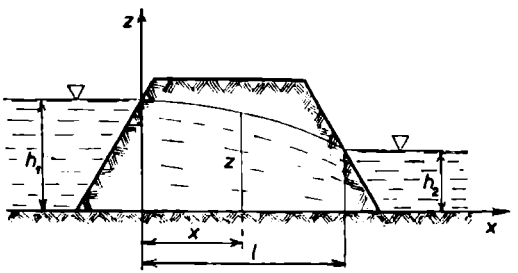
$\left(\text{a negatív előjel azért szükséges, mert maga a } \frac{dz}{dx}<0\right)$. Behelyettesítve:

$$q=-kz\frac{dz}{dx}.$$

* L. *Németh:* Ivóvízellátás.
** L. *Szilágyi:* Hidraulika.

A változókat szétválasztva és az integrálást kijelölve:

$$\int_{l}^{x} q\,dx = -\int_{h_2}^{z} kz\,dz.$$



213. ábra

Integrálva:

$$q(x-l) = -k\left(\frac{z^2}{2} - \frac{h_2^2}{2}\right).$$

A depresszióvonal tehát *parabola.*

Az átszivárgó vízmennyiség végül, a $z(0) = h_1$ feltétel figyelembevétele lével így alakul:

$$q = \frac{k(h_1^2 - h_2^2)}{2l}.$$

5. TALAJOK ÁTERESZTŐKÉPESSÉGI EGYÜTTHATÓJÁNAK (k) MEGHATÁROZÁSA VÁLTOZÓ VÍZNYOMÁSÚ KÉSZÜLÉKKEL*

A készüléken (214. ábra) *időegység alatt átfolyt víz* mennyiségét megkapjuk, ha a nyomásmérő cső keresztmetszeti területét a nyomómagasság-csökkenés sebességével megszorozzuk. Ez a sebesség: $v = -\frac{dh}{dt}$. (A negatív előjelre azért van szükség, mert t növekedésével h csökken.) *Darcy* törvényének felhasználásával írhatjuk:

$$-f\frac{dh}{dt} = k\frac{h}{L}F,$$

ahol

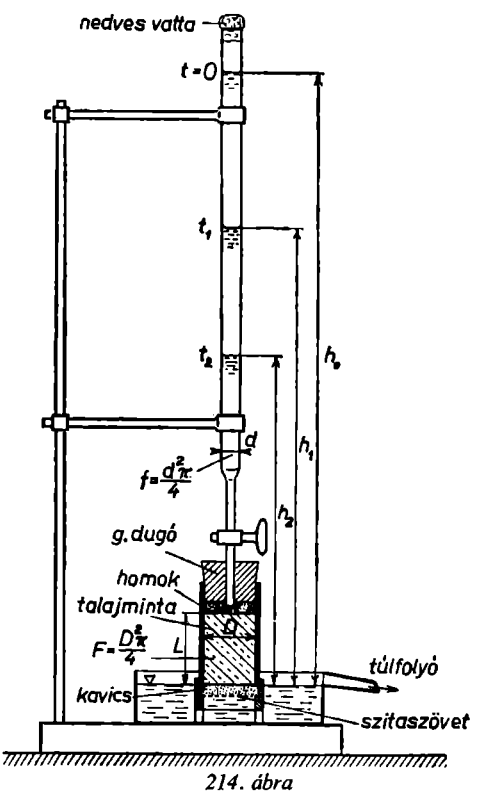
$$f = \frac{d^2\pi}{4} \quad \text{és} \quad F = \frac{D^2\pi}{4}.$$

A változókat szétválasztva:

$$-f\int_{h_1}^{h_2}\frac{dh}{h} = k\frac{F}{L}\int_{t_1}^{t_2} dt.$$

Integrálva, majd a határokat behelyettesítve, az *áteresztőképességi együtthatóra* a következő kifejezést nyerjük:

$$k = \frac{fL}{F}\,\frac{1}{t_2 - t_1}\,\ln\frac{h_1}{h_2}.$$



214. ábra

* L.: *Kézdi:* Talajmechanika, 142—143. o.

6. A VÍZLEPEL FELSZÍNÉNEK EGYENLETE CSÖRGEDEZTETŐ ÖNTÖZÉSNÉL*

Egy folyóméter szélességben vizsgáljuk a csörgedeztető öntözés jelenségét. *Chézy* képletéből indulunk ki, amelyből némi átalakítással adódik, hogy $v_x = C_0 y$, ahol C_0 egy átlagértékekből képezhető állandó (215*a*. ábra). Ezek után az 1 fm szélességben átfolyó, tehát a *fajlagos vízhozam:*

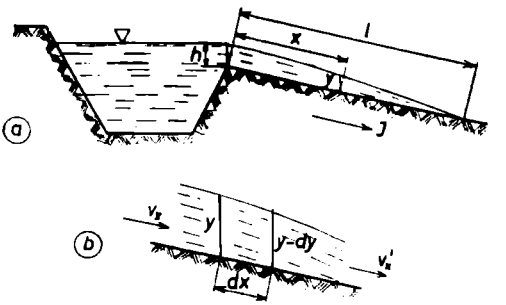
$$q_1 = v_x \cdot 1y = C_0 y \cdot y = C_0 y^2.$$

A beszivárgó vízmennyiség jele legyen w [l/s]. Erre vonatkozólag feltételezzük, hogy:

$$w = k_0 y^m,$$

ahol k_0 a beszivárgási állandó, és $m = 0{,}5$.

Ha az öntözővíz-borításból kiemelünk egy dx szélességű elemi hasábot, és felírjuk a vízhozamot a dx távolság elején és végén; a kettő különbsége a *beszivárgott vízmennyiség* (215*b*. ábra). Tehát (figyelemmel a q_1 csökkenő voltára):



215. ábra

$$C_0 y^2 - C_0 (y + dy)^2 = k_0 y^{1/2}\, dx.$$

Átalakítva:

$$-2C_0 y^{1/2}\, dy = k_0\, dx.$$

Szétválasztva és integrálva:

$$-\frac{2C_0}{k_0} \int_z^0 y^{1/2}\, dy = \int_x dx,$$

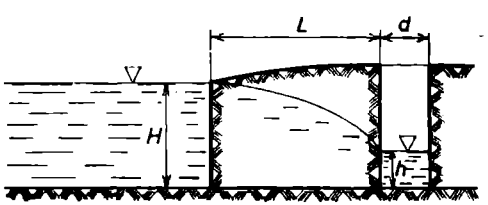
ahonnan:

$$\frac{4C_0}{3k_0} y^{3/2} = l - x.$$

Ha ismerjük a kezdeti vízréteg vastagságát, az l *beszivárgási hossz* számítható. Ez esetben $y(0) = h$. E feltétel segítségével:

$$\frac{4C_0}{3k_0} h^{3/2} = l.$$

Az utóbbi két egyenlet osztásából átrendezéssel adódik a csörgedező vízlepel felszínének *egyenlete:*



216. ábra

$$y^{3/2} = h^{3/2}\left(1 - \frac{x}{l}\right).$$

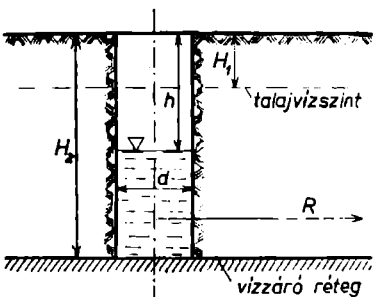
7. A folyó partjától $L = 20$ m távolságra, *homokkő*-lerakódásban egy $d = 6$ m átmérőjű *henger alakú aknát* ásunk a vízzáró rétegig, amely $H = 8$ m-nyi mélyen van a folyó szintje alatt (216. ábra). Határozzuk

* L. *Németh:* Mezőgazdálkodási vízhasznosítás.

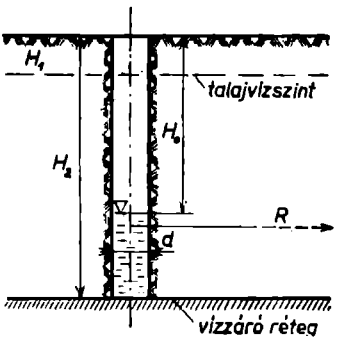
meg az aknába beszivárgó víz mennyiségét, ha szivattyúk segítségével ott állandó $h = 1$m-es vízoszlopmagasságot biztosítunk, továbbá $k = 10$ darcy áteresztőképességgel (és $t = +10$ C° hőmérséklettel) számolunk.

8. Talajvíz-szivattyúzás céljából $d = 2$ m átmérőjű *kut*at ásnak. Az ásás folyamán a talajvízszint a talajfelszíntől számítva $H_1 = 2{,}5$ m, a vízzáró réteg pedig $H_2 = 12{,}5$ m mélyen mutatkozik (217. ábra). Meghatározandó azon folyadékmennyiség, amelyet a szivattyúknak ki kell szívni $h = 6$ m mélységben. A talaj *homokos*, kissé *agyaggal* elegyítve. A tápterület sugara $R = 145$ m.

9. Egy talajvízzel elárasztott *agyagos homokkő*rétegbe egy $d = 1$ m átmérőjű *kut*at fúrnak. A tápkörzet sugara $R = 1500$ m. A talajvíz felszíne felülről számítva $H_1 = 4$ m, a vízzáró réteg pedig $H_2 = 30$ m mélységben van (218. ábra). Kérdés, mekkora szivattyúzással süllyeszthető a kútbeli vízszint felülről számítva $H_0 = 26$ m mélyre.



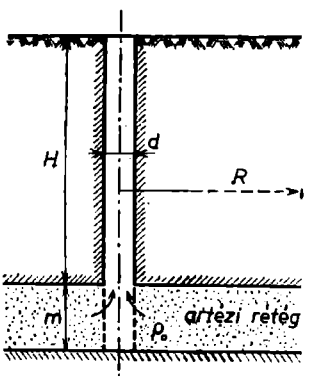
217. ábra



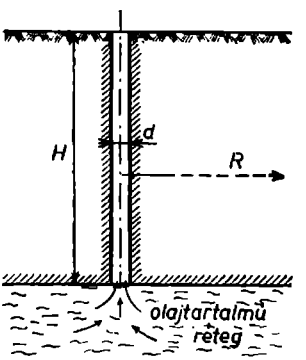
218. ábra

10. *Kútaknát* fúrnak egy *artézi rétegbe*, melynek felszíne a talajfelszín alatt $H = 55$ m mélységben van, vastagsága $m = 20$ m, nyomása $p_0 = 10$ atm (219. ábra). A talaj *agyagos homok*. Határozzuk meg, hogy mekkora vízmélységet szolgáltat az artézi kút szökőkútszerű feltételek mellett, ha az akna átmérője $d = 30{,}5$ cm és a tápkörzet sugara $R = 500$ m. A megoldásnál az ellenállásra és a víz felnyomására tartalékoljunk 5 m vízoszlopnyomást.

11. Nagy teljesítményű *olajtartalmú réteg* helyezkedik el $H = 600$ m mélységben (220. ábra). Meghatározandó a *maximális olajhozam* a következő adatok mellett: a fúrólyuk



219. ábra



220. ábra

átmérője $d = 40$ cm, a lecsapolási sugár $R = 600$ m, a rétegnyomás $p_0 = 60$ atm, a réteg áteresztőképessége $k = 5$ darcy, az olaj fajsúlya $\gamma = 880$ kp/m^3, abszolút viszkozitása $\mu = 0{,}88$ poise; szökőkútszerű feltételek; a felnyomás és az ellenállások leküzdésére tartalékolandó 5 m folyadékoszlopnyomás.

d) Térerősség, potenciál, erő, munka stb.

α) **Az *n*-edrendű nyomaték**

A folytonos tömegeloszlás első- és másodrendű nyomatékának differenciálját

$$dM = dm\, r, \quad \text{illetve} \quad dI = dm\, r^2$$

általános alakban írhatjuk, ahol dm a tömegelem, az r pedig ennek valamely síktól, tengelytől, illetve pólustól (planáris, axiális, poláris nyomaték) mért távolsága.

Ezek mintájára beszélhetünk *a folytonos tömegeloszlás* valamely tengelyre, síkra, illetve pólusra vonatkozó *n-edrendű nyomatékáról*; ennek *differenciálja* nyilván:

$$dN = dm\, r^n.$$

β) **Térerősség, potenciál**

Ilyen nyomatékok valóban szerepelnek is a műszaki és természettudományokban. Közülük legfontosabb *a* (-1)*-ed és* (-2)*-ed rendű nyomaték, az ún. Newton-féle potenciál és térerősség (pl. nehézségi, elektromos)*. Ezek *differenciálja* tehát:

$$dU = \frac{dm}{r} \quad \text{és} \quad dE = \frac{dm}{r^2},$$

ahol dm pl. a súlyos tömeg, illetve az elektromos töltés eleme. A fizikai előjelviszonyokat itt figyelmen kívül hagyjuk. Mindkettő *poláris* nyomaték, azaz egy adott pontra, fizikailag a pontban elhelyezett tömeg-, illetve pozitív töltésegységre vonatkozik. Ilyen értelemben beszélünk (pl. a nehézségi, elektromos térben) a potenciál és a térerősség egy pontbeli értékéről. A térerősség fentebbi differenciálja nyilvánvalóan *összhangban van a Newton-*, illetve *a Coulomb-törvénnyel* — eltekintve az arányossági tényezőtől.

A folytonos tömegeloszlás ismét legyen *homogén*, és a δ állandó sűrűséget — az egyszerűség kedvéért — újra 1-nek válasszuk!

Egy meghatározott homogén síkrész, görbedarab, felületdarab, térrész által egy adott pontban létesített potenciál, illetve térerősség kiszámítása *általában többszörös integrál* útján történik. Csak néhány speciális (rendszerint több-kevesebb szimmetriát mutató) esetben sikerül a megoldás egyszeres integrálás útján.

Megjegyzendő, hogy a térerősség dE differenciálja és így az E *térerősség* is *vektormennyiség;* a dE vektorának iránya megegyezik az adott pontot és a dm tömegelemet összekötő r rádiuszvektor irányával. (E vektorok értelmét — az előjelviszonyok mellőzése miatt — itt szintén figyelmen kívül hagyjuk.) E vektorjelleg miatt gyakran az E-nek egy *adott irányú komponensét* számítjuk, mégpedig a dE hasonló irányú komponensének integrálása útján.*

A térerősség és potenciál közeli *kapcsolatban van* egymással.** Mint már a nehézségi erőtérre az A. IV. 1. § M. a. 2-ben láttuk, a potenciál egy pontbeli értéke megegyezik a tér-

* és ** L. részletesen a sorozat B. III. kötetében!

erősségnek (mint a tömegegységre ható erőnek) a végtelentől e pontig végzett munkájával. *A potenciál* tehát *fajlagos, a tömegegységre (töltésegységre) ható erő, ún. térerősség által (ellenében) a végtelentől az adott pontig végzett munka.*

γ) Vonzóerő és munkája

Egy m_1 folytonos tömegeloszlás (pl. nehézségi, elektromos) *erőhatását* sok esetben nem egy pontban elhelyezett tömegegységre, hanem *egy másik m_2 folytonos tömegeloszlásra* vonatkozólag vizsgáljuk. Ezen *erő differenciálja* nyilván:

$$dP = dm_2 E.$$

Ennek integrálása útján — a *Newton-* és *Coulomb*-törvénynek megfelelően — *vonzóerő vagy taszítóerő számítását eszközölhetjük.* Az erő is *vektormennyiség*, s így rá is érvényesek a fentebbi megjegyzések. Ha m_2 *kisméretű*, akkor jó közelítéssel:

$$P = m_2 E.$$

Sűrűn szerepel a műszaki számításokban *egy kisméretű m tömegre a Föld M tömege által gyakorolt vonzóerő, az m tömeg ún. súlya*, mely az A. IV./1. § M. a. 2. szerint:

$$P = -\varkappa \frac{Mm}{r^2} = -\varkappa \frac{M}{R^2} \cdot \frac{m}{k^2} = \frac{mg}{k^2},$$

ahol $R = \frac{r}{k}$ a Föld sugara; $k = 1$, azaz $R = r$ esetén tehát: $P = mg$. Ugyanott láttuk, hogy *a súlyerő ellenében R-től* $\varrho = R + h$*-ig végzett munka, ha* $h \ll R$, így alakul:

$$L = mg \frac{R}{\varrho} (\varrho - R) \approx mgh.$$

E képlet egyszersmind a Föld felszíne felett h ($\ll R$) magasságban levő m tömeg ún. (nehézségi) *potenciális energiáját* adja.

Kiterjedtebb m tömeg esetén figyelembe vesszük, hogy ennek különböző *dm* elemeit más és más h ($\ll R$) magasságra kell emelni, s így *a munka:*

$$L \approx g \int_{(m)} h \, dm.$$

δ) Változó erő munkája

Az 1. §-ban említettük, hogy *általában valamely P(s) változó erőnek az irányába eső s út* $[a, b]$ *szakasza mentén végzett L munkája*

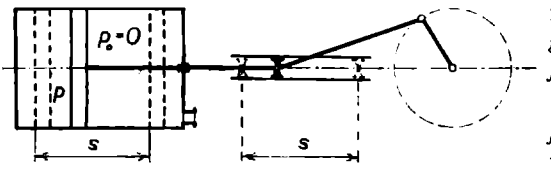
$$L = \int_a^b P(s) \, ds$$

módon számítható.* Természetesen az előbb tárgyalt nehézségi és elektromos erőn kívül *egyéb fajta munkavégző erők* is szerepelnek műszaki számításokban, pl. mechanikai, rugalmas, pneumatikus, hidraulikus stb. erők. Ezek közül itt csupán a gőz- és gázgépek elméletében nagy szerepet játszó pneumatikus erőről teszünk még említést.

* A munka általánosabb tárgyalását l. a B. III. kötetben.

ε) Expandáló gáz munkája

Legyen a henger v_1 *térfogatú, pl. bal oldali részében* p_1 *túlnyomású gáz.* E körhenger alakú térrész egyik alaplapját a hengerfal, a másikat a dugattyú alkotja. Tegyük fel, hogy a hengerben a dugattyú másik oldalán a túlnyomás 0 (azaz atmoszférikus nyomás uralkodik), továbbá, hogy a dugattyú munkavégzésre alkalmas szerkezettel kapcsolatos. *A dugattyút a bal oldali túlerő jobbra elmozgatja, tehát munkát végez,* miközben a gáz térfogata v_1-ről v-re növekszik, nyomása viszont — az adott $p=p(v)$ állapotegyenletnek megfelelően — p_1-ről *p-re* csökken. *Kérdés, mekkora a gáz expanziós munkája, miközben térfogata* v_1*-ről* v_2*-re növekszik* (221. ábra).



221. ábra

*Az expanziós munka differenciálját** úgy nyerjük, mintha a gáztérfogat v-ről $v+dv$-re való megnövekedése, illetve az ennek megfelelő $ds=\frac{dv}{F}$ dugattyúelmozdulás közben a dugattyúra ugyanazon $P=Fp(v)$ túlerő hatna; ily módon:

$$dL=P(v)\,ds(v)=Fp(v)\frac{dv}{F}=p(v)\,dv.$$

A kérdezett expanziós munka tehát:

$$L=\int_{v_1}^{v_2}p(v)\,dv.$$

Megjegyzendő, hogy leggyakrabban *izotermikus*, illetve *adiabatikus állapotváltozás*sal, vagyis

$$pv=\text{const.},\quad \text{illetve}\quad pv^{\varkappa}=\text{const.}$$

*állapotegyenletek*kel dolgozunk. A gyakorlatban rendszerint $\varkappa=1{,}2\sim1{,}4$.

Az L fentebbi képlet által szolgáltatott számértéke egyszersmind — a határozott integrál geometria értelmezésének megfelelően — a nyomás - térfogat-diagrammban a *görbe alatti terület* $[v_1, v_2]$ szakaszmenti darabjának mérőszámával egyenlő.

Szokás számítani valamely v_1-től kezdve *a gáz teljes expanziós munkáját,* amikor $p_2=0$, $v_2=\infty$.

ζ) Egyenáram mágneses tere

Számítása némileg emlékeztet az elektromos erőterére, ezért néhány szóval kitérünk rá.

A Biot—Savart-törvény értelmében az I erősségű áram átjárta vonalszerű (elhanyagolhatóan csekély keresztmetszetű) *vezető dl eleme a tőle r távolságban levő P pontban* (222. ábra)

$$dH=\frac{I}{4\pi}\,\frac{dl\sin\varphi}{r^2}\left(=\frac{I}{4\pi}\,\frac{|dl\times r^0|}{r^2}\right)$$

*nagyságú mágneses térerősséget létesít;*** itt $\varphi=\varphi(l)$ a dl vonalelem és $r(l)$ rádiuszvektor hajlásszöge, l a vezető ívhossza valamely rögzített pontjától számítva; (a dH vektor merőleges

* L. a 2. §-t!
** A vektoranalitikus alakról l. bővebben a B. I. és B. III. kötetben.

a dl és r° vektorok síkjára). Ennek megfelelően *a teljes áramkör által a P pontban létesített mágneses térerősség nagysága*

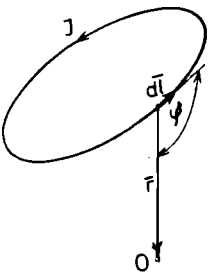
$$H = \frac{I}{4\pi} \int_{(L)} \frac{\sin \varphi(l)}{r^2(l)}\, dl$$

módon számítható; itt L a teljes vezető ívhossza (ez esetleg ∞ is lehet).

Olykor egyszerűbb az *egyenáram mágneses terének számítása az*

$$\int_{(S)} H_s\, ds = I\left(= \oint_{(S)} H\, ds\right)$$

alakú, ún. gerjesztési törvény segítségével, ahol S* egy, az I áram átjárta vezetőt körülvevő tetszőleges *zárt* görbe ívhossza, H_s a mágneses térerősség tangenciális komponense e görbe mentén. Ha e zárt görbe n db I áram átjárta vezetőt vesz körül, akkor az előbbi formulában I helyett nI írandó.



222. ábra

η) Megjegyzés

Végezetül még egyszer hangsúlyozzuk, hogy *a térerősség, potenciál, erő, munka stb. problémaköréből e helyen csak néhány kiragadott, egyszerű egyszeres integrálással számítható speciális esetet érintettünk.* E problémakör rendszeres és általános tárgyalására majd visszatérünk a sorozat B. I., B. II. és B. III. köteteiben — a vektor- és skalárfüggvényekre, ezek differenciálására, valamint vonal menti, felületi és térbeli integráljára vonatkozó ismeretek birtokában.

Példák és feladatok

Nehézségi erőtér

1. Mekkora *erővel* hat az M tömegű, r sugarú és ehhez képest csekély keresztmetszeti méretű *homogén félgyűrű* a középpontjában elhelyezett *m pontszerű tömegre?*

A 223. ábra szerint a félgyűrű két, az y tengelyre szimmetrikus *eleme* által a középpontbeli m tömegpontra gyakorolt vonzóerő eredője:

$$dP = dP_y = 2dP_y^* = 2\varkappa \frac{mfr\, d\varphi\varrho}{r^2} \sin\varphi \qquad (y \text{ irányú}).$$

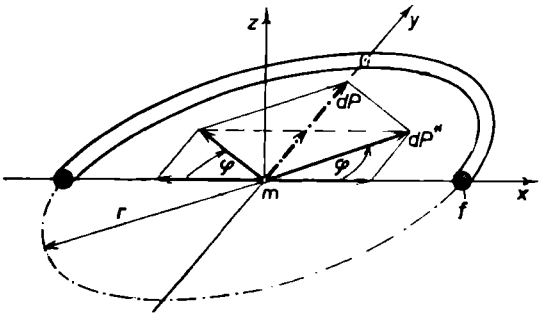
A *teljes vonzóerő* pedig (tekintettel a két szimmetrikus negyedgyűrűre):

$$P = P_y = 2\varkappa \frac{mfr\pi\varrho}{r^2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin\varphi\, d\varphi =$$

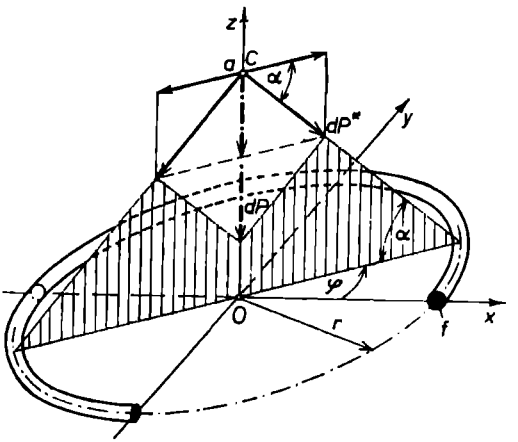
$$= 2\varkappa \frac{mM}{r^2\pi} = \varkappa \frac{mM}{\left(r\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^2} \qquad (y \text{ irányú}),$$

* A vektoranalitikus alakról l. bővebben a B. I—II—III. kötetben.

mely láthatóan *ugyanakkora, mintha a félgyűrű teljes M tömegét az y tengely* $y_0 = r\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ *(>r) ordinátájú pontjába koncentráltuk volna.*



223. ábra



224. ábra

2. Helyezzük az előbbi példában említett *m pontszerű tömeget* a *gyűrű* síkjára merőleges tengelyen e síktól *a* távolú *C* pontba. Mekkora *vonzóerőt* gyakorol erre a $2M$ tömegű egész gyűrű; mekkora ugyanott a $2M$ tömeg által létesített *potenciál* (vagyis a térerősség által a tömegegységnek a végtelenből e pontba vonzása közben végzett munka)?

A gyűrű két diametrális *eleme* által a *C* pontbeli *m* tömegpontra gyakorolt vonzóerő nyilván (224. ábra):

$$dP = dP_z = 2\,dP_2^* = -2\varkappa \frac{mfr\,d\varphi}{r^2+a^2}\sin\alpha = -2\varkappa \frac{mfr\,d\varphi\,a}{(r^2+a^2)^{3/2}}$$

(a $-z$ tengely irányába mutat).

A *teljes vonzóerő* pedig (tekintettel a két szimmetrikus félgyűrűre):

$$P = P_z = -2\varkappa \frac{mfr\pi a}{(r^2+a^2)^{3/2}} = -\varkappa a \frac{m\cdot 2M}{(r^2+a^2)^{3/2}}$$

(a $-z$ tengely irányába mutat).

Ennek birtokában a *C* pontbeli *potenciált* így nyerjük:

$$U = \int_{\infty}^{a} E(z)\,dz = \frac{1}{m}\int_{\infty}^{a} P(z)\,dz = -\varkappa M \int_{\infty}^{a} \frac{2z\,dz}{(r^2+z^2)^{3/2}} = 2\varkappa M\left[\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}\right]_{\infty}^{a} = \frac{2\varkappa M}{\sqrt{r^2+a^2}}.$$

A gyűrű O középpontjában pedig a potenciál:

$$U_0 = \frac{2\varkappa M}{r}.$$

3. Az előző példa eredményét felhasználva számítsuk ki, hogy mekkora erővel *vonzza* az r, majd ∞ sugarú, σ felületi sűrűségű *korong* a síkjára merőleges tengelyen e síktól a távolságban fekvő m *tömegpont*ot?

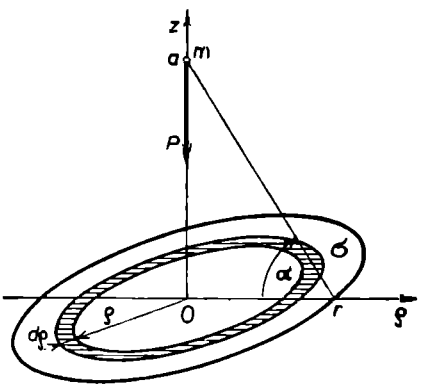
Az előző példában $2M$ helyébe $2\varrho\pi\, d\varrho\sigma$-t írva, a kérdezett *vonzóerő* így alakul (225. ábra):

$$P = P_z = -\pi\varkappa a m\sigma \int_0^r \frac{2\varrho\, d\varrho}{(\varrho^2 + a^2)^{3/2}} =$$

$$= +2\pi\varkappa a m\sigma \left[\frac{1}{\sqrt{\varrho^2 + a^2}}\right]_0^r =$$

$$= -2\pi\varkappa m\sigma\left(1 - \frac{a}{\sqrt{r^2 + a^2}}\right) =$$

$$= -2\pi\varkappa m\sigma(1 - \sin\alpha)$$



225. ábra

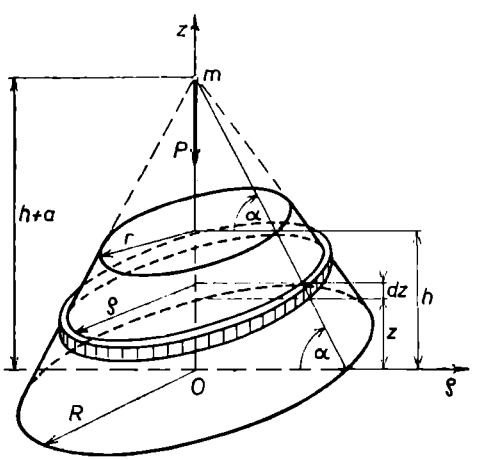
(a $-z$ tengely felé mutat).

Ha pedig $r \to \infty$, vagyis a korong *végtelen sík*ba megy át, akkor az m tömegpontra gyakorolt vonzóerő nyilván:

$$P = -2\pi\varkappa m\sigma$$

(a $-z$ tengely irányába mutat).

4. Egy *egyenes csonka körkúp* alap-, ill. fedőlapjának sugara R, ill. r, magassága h, sűrűsége ϱ. Mekkora erővel *vonzza* ez a csúcsában elhelyezett m *tömegpont*ot? Használjuk fel az előző példa eredményét.



226. ábra

A 226. ábra szerint, az előző példa

$$P = -2\pi\varkappa m\sigma(1 - \sin\alpha)$$

eredményképletében a σ helyébe $\varrho \cdot 1 \cdot dz$-t írva, és az így nyert

$$dP = -2\pi\varkappa m\varrho(1 - \sin\alpha)\, dz$$

elemi vonzóerőket „összegezve" (meggondolva, hogy az α minden dz vastagságú elemi korongra ugyanakkora), nyerjük végül:

$$P = -2\pi\varkappa m\varrho(1 - \sin\alpha)h,$$

mivel $0 \leqq z \leqq h$; a *vonzóerő* a $-z$ tengely irányába mutat.

5. Mekkora erővel *vonzza* az $y = |x| + 1$ *anyagszerű törött vonal* a koordináta-rendszer középpontjában fekvő m *anyagi pont*ot (a lineáris sűrűség $= \gamma$)?

6. Igazolandó, hogy az $y = a|x| + 1$ $(a > 0)$ *anyagszerű törött vonal* állandó erővel *vonzza* a koordináta-rendszer középpontjában fekvő *anyagi pont*ot, függetlenül az a-tól, vagyis a törött vonal hajlásszögétől.

7. *Két egyforma rúd* (mindkettő l hosszúságú és M tömegű), ugyanazon egyenes mentén, egymástól l távolságban helyezkedik el. Számítsuk ki a köztük ható *erő*t.

8. Az l hosszúság, M tömegű AB rúd vonzza az m tömegű C pontot, amely a rúd tengelyén (a rúdon túl) fekszik a rúd hozzá közelebb fekvő B végétől a távolságra. Határozzuk meg a *rúd és a pont között ható P erő*t. Mekkora M_0 pontszerű tömeget kell elhelyezni az A pontban, hogy *ugyanakkora* hatása legyen a C pontra, mint az AB rúdnak? Mekkora L *munkát* végez a vonzóerő, mikor a rúdtól r_1 távolságra levő pont r_2 távolságra megközelíti a rudat, a rúd tengelye mentén?

9. Meghatározandó az $l = 10$ m hosszúságú *rúd tömege*, ha δ vonalmenti sűrűsége a rúd egyik végétől mért x távolság függvényében

$$\delta = 6 + 0{,}3x \quad [\mathrm{kgs^2/m^2}]$$

módon változik.

10. Mekkora *munkát* kell végezni a nehézségi erő ellenében ahhoz, hogy feltöltsünk egy *egyenes körkúp alakú homokrakás*t, amelynek alapkörsugara $r = 1{,}2$ m, magassága $h = 1$ m; a homok fajsúlya $\gamma = 2$ p/cm^3.

A körkúp alakú homokrakás egy x magasságban levő, $\varrho = r\dfrac{h-x}{h} = r\left(1 - \dfrac{x}{h}\right)$ sugarú, dx vastagságú korong alakú *elemét* nyilván

$$dL = dGx = \gamma \varrho^2 \pi \, dx \cdot x = \gamma \frac{r^2\pi}{h^2} x(h-x)^2$$

munka árán lehet a földről a mondott helyre felemelni. Ezen elemi munkát „összegezve", nyerjük *a keresett munkát:*

$$L = \gamma \frac{r^2\pi}{h^2} \int_0^h x(h-x)^2 \, dx = \gamma \frac{r^2\pi}{h^2} \left[-x \frac{(h-x)^3}{3} - \frac{(h-x)^4}{12} \right]_0^h =$$

$$= \frac{\gamma r^2 \pi h^2}{12} = \frac{\gamma r^2 \pi h}{3} \cdot \frac{h}{4} = G\frac{h}{4}.$$

E munka tehát *a kúp G súlyának és* $x_s = \dfrac{h}{4}$ *súlyponti ordinátájának szorzatával egyenlő;* ez nem váratlan eredmény, minthogy tulajdonképpen elsőrendű nyomatékot számítottunk.

A megadott *számértékekkel* e munka:

$$L = \frac{\gamma r^2 \pi h^2}{12} = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 1{,}2^2 \pi \cdot 1}{12} = 753{,}6 \text{ mkp.}$$

11*. Egy *félkörív*es *lefedésű csarnok vasbeton tartói a földön készülnek előre gyártva,* és innen emelik fel azokat függőleges helyzetbe. Hány mkp *munka* kell a *felemeléshez,* ha az ív sugara $r = 10$ m, és az ív folyómétersúlya $g = 240$ kp?

Körről lévén szó, a feladatot polárkoordináta-rendszerben tárgyaljuk. A 227. ábrán látható jelölésekkel élve, a *ds ívelem* súlya $dG = gr \, d\varphi$.

* L. *Pelikán:* Matematika, 152—153. old.

E *ds* ívelem eredetileg a földön feküdt, elhelyezése után $h = r \sin \varphi$ magasságba kerülvén, a felemeléshez szükséges *elemi munka:*

$$dL = dGh = gr^2 \sin \varphi.$$

Az egész ív felemeléséhez szükséges munka tehát:

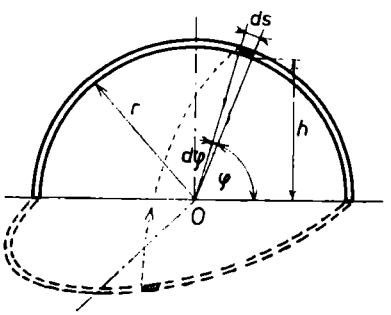
$$L = \int_0^{\pi} gr^2 \sin \varphi \, d\varphi = gr^2 \Big[-\cos \varphi \Big]_0^{\pi} = 2gr^2.$$

Az adott értékeket behelyettesítve:

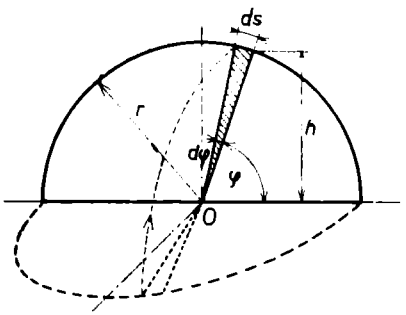
$$L = 2 \cdot 240 \cdot 10^2 = 48\,000 \text{ mkp}.$$

12*. Az előbbi példában szereplő *csarnok végfalát is előre gyártják.* Mennyi *munka* kell ennek a *felemeléséhez,* ha a fal négyzetméterenkénti súlya $g = 200$ kp?

A 228. ábrán vonalkázott *elemi felület* területe:



227. ábra



228. ábra

$$dF = \frac{r\,ds}{2} = \frac{r^2\,d\varphi}{2},$$

súlya:

$$dG = \frac{gr^2}{2}\,d\varphi.$$

Felemelt állapotban az elem *súlypontja* $h = \frac{2}{3} r \sin \varphi$ magasságba kerül, s így a felemeléshez szükséges *munka:*

$$dL = h\,dG = \frac{2}{3} r \sin \varphi \cdot g \frac{r^2}{2}\,d\varphi = g \frac{r^3}{3} \sin \varphi \, d\varphi.$$

Az egész fal felemeléséhez szükséges munka tehát:

$$L = \int_0^{\pi} g \frac{r^3}{3} \sin \varphi \, d\varphi = g \frac{r^3}{3} \Big[-\cos \varphi \Big]_0^{\pi} = \frac{2}{3} gr^3.$$

* L. *Pelikán:* Matematika, 152—153. old.

Az adott számértékeket behelyettesítve:

$$L = \frac{2}{3} 200 \cdot 10^3 = 133\,300 \text{ mkp.}$$

13. Az M kezdeti tömegű *csepp* (a Földhöz közel) a nehézségi erő hatása alatt *zuhan a Föld felé, és közben párolog*, másodpercenként m tömeget veszítve. Mekkora *munkát* végez a nehézségi erő a csepp teljes elpárolgásáig? (A légellenállást elhanyagoljuk.)

A Föld közelében állandó g nehézségi gyorsulással számolhatunk. A csepp *tömege* a párolgás megindulta után t másodperccel:

$$M^* = M - mt;$$

a párolgás nyilván $t_0 = \frac{M}{m}$ másodpercig tart, amely időszak végén $M^* = 0$. A szabadesésnél a t idő alatt megtett út és differenciálja, állandó g-vel számolva:

$$s = \frac{g}{2} t^2, \qquad ds = gt\, dt.$$

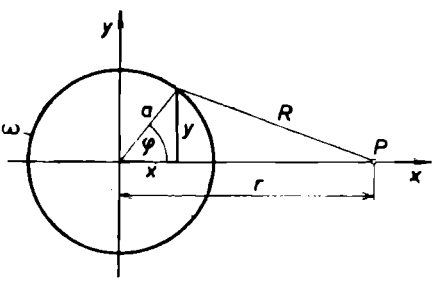
A kérdezett munka tehát:

$$L = \int_0^{s_0} M^* g\, ds = \int_0^{t_0} (M - mt) g^2 t\, dt = g^2 \left(M \frac{M^2}{2m^2} - m^2 \frac{M^3}{3m^2} \right) = \frac{M^3 g^2}{m^2}.$$

14. A *Cheops-piramis* adatai közelítőleg a következők: magassága 140 m, az alapéle (négyzet) 200 m. A kő fajsúlya körülbelül 2,5 p/cm^3. Számítsuk ki, hogy az építése közben mekkora *munkát* végeztek a nehézségi erő ellenében.

Elektromos erőtér

1. FÉMGÖMBHÉJ POTENCIÁLJA EGY TETSZŐLEGES NEM RAJTA FEKVŐ PONTBAN



229. ábra

Legyen a fémgömbhéj *felületi* (elektromos) *töltéssűrűsége* ω, sugara a (229. ábra). A forgásfelületnek tekintett gömbfelület (gyűrű alakú) *felületeleme:*

$$dF = 2\pi y \sqrt{1 + y'^2}\, dx =$$

$$= 2\pi \sqrt{x^2 + y^2}\, dx = 2\pi a\, dx,$$

mert

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad \text{és} \quad y' = -\frac{x}{y}.$$

Az általa létesített *potenciál P-ben*: $dU = \omega \frac{dF}{R}$. Itt a cosinus*tétel* szerint:

$R^2 = a^2 + r^2 - 2ar \cos \varphi$, és $\cos \varphi = \frac{x}{a}$ lévén, $R = \sqrt{a^2 + r^2 - 2rx}$.

Ennélfogva:

$$dU = 2\pi a \omega \frac{dx}{\sqrt{a^2 + r^2 - 2rx}},$$

és így:

$$U = 2\pi a\omega \int_{x=-a}^{a} \frac{dx}{\sqrt{a^2+r^2-2rx}}.$$

Helyettesítés:

$$u = a^2 + r^2 - 2rx, \qquad du = -2r\,dx, \qquad dx = -\frac{du}{2r},$$

továbbá

$$u_a = a^2 + r^2 + 2ra = (a+r)^2, \quad \text{ill.} \quad u_f = a^2 + r^2 - 2ra = (r-a)^2,$$
$$\text{ha} \quad r > a \quad \text{és} \quad u_f = (a-r)^2, \quad \text{ha} \quad a > r.$$

Ezzel *a P-beli potenciál, ha* $r > a$*:*

$$U = 2\pi a\omega\left(-\frac{1}{2r}\right)\int_{(r+a)^2}^{(r-a)^2} \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{2\pi a\omega}{r}\left[\sqrt{u}\right]_{(r-a)^2}^{(r+a)^2} =$$

$$= \frac{2\pi a\omega}{r}\left[\sqrt{(r+a)^2} - \sqrt{(r-a)^2}\right] = \frac{2\pi a\omega}{r}(r+a-r+a) = \frac{4a^2\pi\omega}{r} = \frac{Q}{r},$$

vagyis *a gömbön kívül a potenciál ugyanakkora, mintha a Q össztöltés a gömb középpontjába volna koncentrálva.*

Végül *a P-beli potenciál, ha* $a > r$*:*

$$U = \frac{2\pi a\omega}{r}\left[\sqrt{(a+r)^2} - \sqrt{(a-r)^2}\right] = \frac{2\pi a\omega}{r}[a+r-a+r] =$$

$$= 4\pi a\omega = \frac{4a^2\omega}{a} = \frac{Q}{a},$$

vagyis *a gömbhéj belseje ekvipotenciális,* mégpedig a gömbhéjével egyenlő potenciálú tér.

2. FÉLGÖMBTEST POTENCIÁLJA EGY TETSZŐLEGES KÜLSŐ VAGY BELSŐ PONTBAN

Legyen a gömb sugara *a* és állandó *térbeli* (elektromos) *töltéssűrűsége* ϱ (230. ábra). Egy *dr* vastagságú *gömbhéj potenciálja* $R > a$ *esetén P-ben* (az előbbi példa értelmében):

$$dU = \frac{dV\varrho}{R} = \frac{dQ}{R},$$

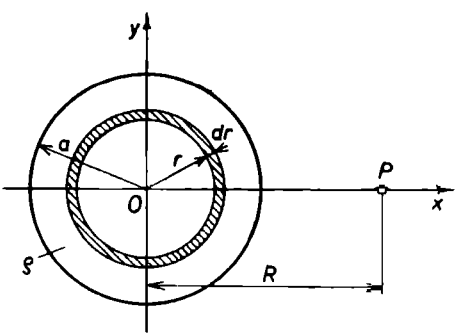
és így az egész *gömbtesté:*

$$U = \frac{\varrho}{R}\int dV = \frac{\varrho}{R}\,\frac{4a^3\pi}{3} = \frac{Q}{R},$$

vagyis *a gömbön kívül a potenciál ugyanakkora, mintha a Q össztöltés a gömb középpontjába volna koncentrálva.*

Ha viszont $R < a$, akkor a most nyert eredmény szerint *a P ponton belüli gömbtest potenciálja P-ben:*

$$U_b = \frac{Q}{R} = \frac{4R^3\pi}{3}\varrho\,\frac{1}{R} = \frac{4R^2\pi\varrho}{3}.$$



230. ábra

A P ponton kívüli dr vastagságú *gömbhéj potenciálja* pedig *P-ben* (az előbbi példa szerint):

$$dU_k = \frac{4r^2\pi\varrho}{r}\,dr = 4r\pi\varrho\,dr\,,$$

és így az $(a - R)$ vastagságú *gömbgyűrűé:*

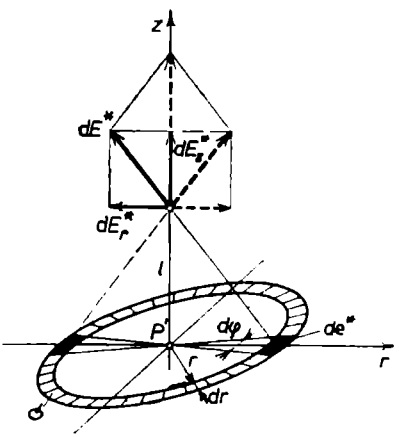
$$U_k = 4\pi\varrho\int_{r=R}^{a} r\,dr = 4\pi\varrho\left(\frac{a^2}{2} - \frac{R^2}{2}\right).$$

A két potenciál, mint skalárérték, egyszerűen *összegeződik:*

$$U = U_k + U_b = 2\pi\varrho(a^2 - R^2) + \frac{4}{3}\pi R^2\varrho = U = 2\pi\varrho\left(a^2 - \frac{R^2}{3}\right) = \frac{4a^2\pi\varrho}{3}\left(\frac{3}{2} - \frac{R^2}{2a^2}\right),$$

vagyis *az állandó töltéssűrűségű gömbtest nem ekvipotencionális;* potenciálja a középpont felé haladva nő, s ott éppen $\frac{3}{2}$-szerese a felületinek.

3. EGYENLETES FELÜLETI TÖLTÉSŰ SÍK VEZETŐ ELEKTROMOS TERE



231. ábra

Egy *sík* vezető felületet egyenletes σ *felületi sűrűségű töltés* borít. Határozzuk meg a töltéseloszlás *elektromos terét* (231. ábra).

Keressük azon *térerősséget a síktól l távolságban fekvő P pontban,* amelyet ott egy, a síkban, a *P'* vetületi ponttól *r* távolságban található

$$de^* = \sigma\, r\, d\varphi\, dr$$

töltés létesít. Ez a *Coulomb*-törvény szerint:

$$dE^* = \frac{de}{r^2 + l^2}\,,$$

a térerősségnek a síkra merőleges, illetve a síkkal párhuzamos komponense pedig:

$$dE_z = \frac{de}{r^2 + l^2}\cdot\frac{l}{\sqrt{r^2 + l^2}} = \frac{l\,de}{(r^2 + l^2)^{3/2}}\,,$$

$$dE_r^* = \frac{r\,de}{(r^2 + l^2)^{3/2}}\,.$$

A *P'*-re centrálisan szimmetrikus síkbeli *de* töltések* okozta *P*-beli térerősségben a dE^* megkétszereződik, a dE_r^* kompenzálódik. Ily módon *az r és r + dr sugarú körök közötti* $de = \sigma \cdot 2\pi r\,dr$ *felületi töltés okozta térerősség a P pontban:*

$$dE_z = dE = \frac{l}{(r^2 + l^2)^{3/2}}\cdot 2\pi r\,dr\cdot\sigma, \qquad dE_r = 0.$$

És végül *a teljes síkon eloszló töltés egy, a síktól l távolságban levő pontban* (pl. *P*-ben)

$$E = 2\pi l\sigma\int_0^\infty \frac{r\,dr}{(r^2 + l^2)^{3/2}} = \pi l\sigma\int_{l^2}^{\infty}\frac{du}{u^{3/2}} = 2\pi l\sigma\left[\frac{1}{\sqrt{u}}\right]_{\infty}^{l^2} = 2\pi\sigma$$

nagyságú, a síkra merőleges eredő térerősséget létesít. (Megjegyzendő, hogy feladatunk vektoranalitikai segédeszközökkel egyszerűbben megoldható. L. a B. III. kötetet!)

4. EGYENLETES TÖLTÉSŰ EGYENES VEZETŐ ELEKTROMOS TERE

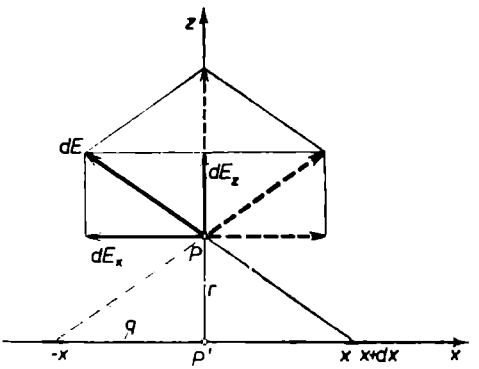
A végtelen *egyenesen* (x tengely) egyenletesen megoszló töltés helyezkedik el (a hosszegységre vonatkozólag) q *vonalmenti sűrűség*gel. Megállapítandó e töltéseloszlás *elektromos tere* (232. ábra).

Keressük a térerősség nagyságát az x tengelytől r távolságban elhelyezkedő P pontban. A P merőleges vetülete az egyenesen P', az egyenes egy futópontjának távolsága ettől x. *Az egyenes* $[x, x+dx]$ *szakaszán levő,* $q\,dx$ *töltés a P-ben* $\frac{q\,dx}{r^2+x^2}$ *térerősséget létesít, amelynek az egyenesre merőleges* (sugárirányú) *komponense:*

$$dE_z = \frac{q\,dx}{r^2+x^2}\cdot\frac{r}{\sqrt{r^2+x^2}} = \frac{gr\,dx}{(r^2+x^2)^{3/2}}.$$

A végtelen egyenes vezetőn eloszló töltés tehát a tőle r távolságú (P) pontban

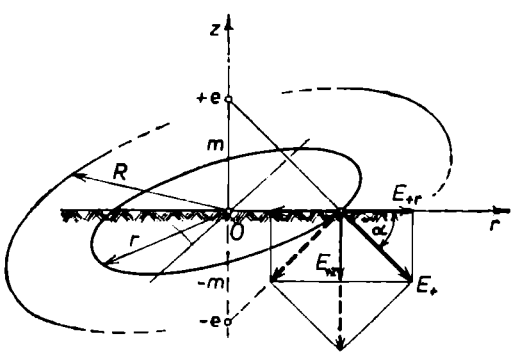
$$E_z = E = rq\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx\,r}{(r^2+x^2)^{3/2}} = \frac{2q}{r}$$



232. ábra

nagyságú, az egyenesre merőleges térerősséget létesít. (Az integrált l. pl. az A. IV. 5. § M. a.-ban!) — E feladat is egyszerűen megoldható vektoranalitikai segédeszközökkel.

5. PONTSZERŰ TÖLTÉS ÉS FÖLDELT VEZETŐ SÍK ELEKTROMOS TERE



233. ábra

Egy végtelen kiterjedésű földelt *vezető sík*tól m távolságban e nagyságú *pontszerű töltés* van. Számítsuk ki *a fémsíkban elhelyezkedő töltések sűrűségét*! Határozzuk meg a töltésből a síkra bocsátott merőleges *O talppontja R sugarú környezetének össztöltését*! (233. ábra.)

A pontszerű e töltés és a földelt vezető sík elektromos terét úgy származtatjuk — a *tükrözési elv* felhasználásával — mintha azt az e töltés és ennek a síkra vonatkozó tükörképpontjában elhelyezett $-e$ töltés hozná létre. Így *a vezetősíkon (kívül) az O ponttól r távolságban az eredő térerősség* (a síkra merőleges):

$$E = 2E_{+,z} = -2\cos\alpha\,\frac{e}{m^2+r^2} = -\frac{2me}{(m^2+r^2)^{3/2}}.$$

Magában *a vezetősíkban (belül)* az elektromos térerősség $E^* = O$. Így a merőleges komponens ugrása: $\Delta E_z = E - E^* = E$. *A felületi töltéssűrűség* tehát:

$$\sigma = \frac{\Delta E_z}{4\pi} = \frac{E}{4\pi} = -\frac{1}{4\pi}\,\frac{2me}{(m^2+r^2)^{3/2}}.$$

Az O-körüli R *sugarú körterület összes töltése* ily módon:

$$Q = -\frac{me}{2\pi}\int_0^R \frac{2\pi r\,dr}{(m^2+r^2)^{3/2}} = -e\left[1 - \frac{m}{\sqrt{m^2+R^2}}\right].$$

Látható, hogy $R \to \infty$ esetén $Q \to -e$, vagyis *az egész vezetősík össztöltése az e pontszerű töltéssel nagyságra megegyezik, előjelben különbözik* — összhangban az influencia elvével.

6. Adva *két elektromos töltés:* $e_1 = 20$ és $e_2 = 30$ elektrosztatikai egység, egymástól 10 cm távolságra. A környezet levegő. Kezdetben mindkét töltés rögzítve van, majd az e_2 *töltést felszabadítjuk.* Ekkor a taszítóerő következtében az e_2 töltés elkezd mozogni és távolodik az e_1 töltéstől. *Mekkora munkát végez a taszítóerő,* ha az e_2 töltés az e_1-től *a)* 30 cm-re eltávolodik, *b)* ha a végtelenbe távolodik?

7. Adva *két elektromos töltés,* $e_1 = 100$ és $e_2 = 120$ elektrosztatikai egység, egymástól 20 cm távolságban. Mekkora lesz a köztük levő *távolság,* ha az egyiket a másikhoz közelítve, 1800 erg *munkát* végeztünk? (A környezet levegő.)

Expandáló gáz munkája

1. Egy 100 cm^2 keresztmetszetű *hengeres edénybe* atmoszferikus nyomású *levegő* van bezárva. Az edénybeli dugattyú kezdeti távolsága az edény fenekétől 0,1 m. A henger légüres térbe helyezve a benne levő *levegő kitágul* és a dugattyút eltolja. ***a)*** Határozzuk meg azt a *munkát,* amit a levegő végez akkor, midőn a dugattyú elmozdul *α)* 0,2 m, *β)* 0,5 m, *γ)* 1 m mértékben. ***b)*** *Korlátlanul növelhető-e* ez a munka a gáz korlátlan kiterjedése által?

A folyamat *izotermikusan* megy végbe, vagyis közben a hőmérséklet állandó.

(Az atmoszferikus nyomás 1,033 kp/cm^2. A munkát mkp-ban kapjuk, ha a nyomást kp/m^2-ben és a térfogatot m^3-ben számítjuk.)

Jelen esetben az *állapotegyenlet:*

$$pv = p_1v_1 = p_1 \cdot fs_1 = 1{,}033 \cdot 10^4 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}1 = 10{,}33.$$

A kérdezett *expanziós munka* tehát:

$$L = \int_{v_1}^{v_2} p(v)\,dv = p_1v_1\int_{v_1}^{v_2}\frac{dv}{v} = 10{,}33\int_{10^{-3}}^{c10^{-3}}\frac{dv}{v} = 10{,}33\ln c,$$

ahol c értéke:

a) *α)* $c = 2$, *β)* $c = 5$ és *γ)* $c = 10$,

b) $c \to \infty$,

és ezeknek megfelelően az expanziós munka:

a) *α)* $L = 10{,}33 \cdot 0{,}693 = 7{,}16$ mkp,

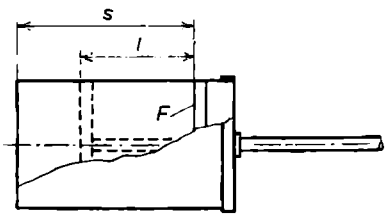
β) $L = 10{,}33 \cdot 1{,}609 = 16{,}65$ mkp,

γ) $L = 10{,}33 \cdot 2{,}302 = 23{,}82$ mkp;

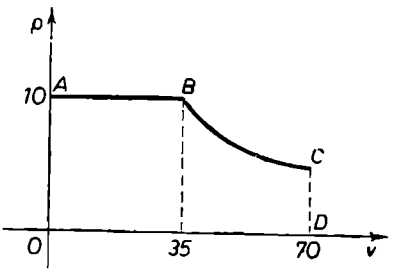
b) $L \to \infty$.

A *b)* eset megvalósítása nem lehetséges, mert a gyakorlatban $p_2 \neq 0$.

2. Egy $F = 10$ cm^2 alapterületű és $s = 30$ cm magasságú *hengeres edény*be atmoszferikus *levegő* van bezárva. Mekkora *munkát* kell végezni, hogy a *dugattyút* $l = 20$ cm-rel *benyomjuk*, azaz, hogy 10 cm-re legyen a henger végétől (234. ábra)?



234. ábra



235. ábra

3. Egy $v_0 = 0{,}1$ m^3 térfogatú *hengeres edény*ben atmoszferikus *levegő* van, melyet a *dugattyú hirtelen benyomásá*val összenyomunk (feltételezzük, hogy közben sem hőfelvétel, sem hőleadás nincs, azaz a jelenség *adiabatikus*an játszódik le). Mekkora *munkát* kell végezni ahhoz, hogy az edényben a levegőt $v = 0{,}03$ m^3-re nyomjuk össze? Kétatomos gázokra (így a levegőre is): $\varkappa = 1{,}40$.

4. A *dugattyús gőzgép* által végzett *munka* kiszámítása céljából az *indikátor-diagramm* területét kell meghatározni. Az indikátor-diagramm a gőznyomás és a henger térfogata közötti összefüggést ábrázolja.* A 235. ábra a gőzgép *egyszerűsített* indikátordiagrammját mutatja.** A rajzon feltüntetett méretekből (mm-ben) határozzuk meg az *ABCDO* területet, feltéve, hogy a *BC* görbe adiabata, melyre $\varkappa = 1{,}3$; az *AB* egyenes párhuzamos a *v* tengellyel.

5. A $d = 20$ cm átmérőjű, $l = 80$ cm hosszú *henger* $p_1 = 10$ kp/cm^2 nyomású *gáz*zal van megtöltve. Mekkora *munkát* kell végeznünk ahhoz, hogy a gáz térfogatát *felére* csökkentsük, ha közben a gáz *hőmérséklete állandó* marad?

***6.** Mekkora *munka* árán *nyújthatunk* meg $\lambda_1 = 10$ cm-rel egy olyan *rugalmas rugót*, mely 1 kp erő hatása alatt 1 cm-rel nyúlik meg?

Egyenáram mágneses tere

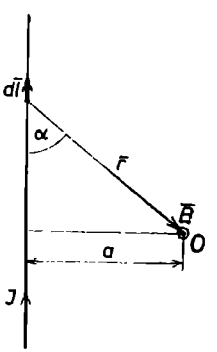
1. VÉGTELEN EGYENES VEZETŐ MÁGNESES TERE

Ha *az áram végtelen hosszú egyenes vezetőben folyik*, akkor a *mágneses térerősség* *O* pontbeli ***H*** vektora merőleges az egyenes és a pont által felfeszített síkra (236. ábra).

Ha az *O* pontot és az áram irányát az ábrán látható módon választjuk, akkor a ***H*** vektor a rajz síkjából felénk mutat.

Figyelembe véve, hogy:

$$|\, d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{r}^0 \,| = dl \sin\alpha \quad \text{és} \quad r = \frac{a}{\sin\alpha},$$



236. ábra

* L. az A. V.* 32. ábráját.
** L. *Berman* i. m. 148. o.

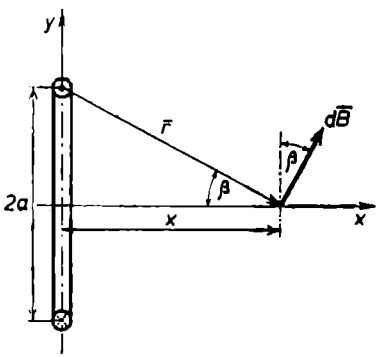
továbbá, hogy:

$$l = a \operatorname{ctg} \alpha \quad \text{és} \quad dl = \frac{-a\,d\alpha}{\sin^2 \alpha},$$

nyerjük *a mágneses térerősség nagyságára*:

$$H = \left| \frac{I}{4\pi} \int_{(L)} \frac{dl \sin \alpha}{r^2} \right| = \left| -\frac{I}{4\pi a} \int_0^{\pi} \sin \alpha \, d\alpha \right| = \frac{I}{2\pi a},$$

amely láthatóan *a pont és a vezető közti távolság első hatványával fordítottan arányos.* (Lásd még az A. IV. 5. § M. a. 1. példát; $C = \frac{1}{4\pi}$). Ugyanez egyszerűen nyerhető a *gerjesztési törvény* segítségével.



237. ábra

2. KÖRVEZETŐ MÁGNESES TERE — TENGELYE MENTÉN

Kör alakú vezető által egy, a tengelyén levő pontban létesített eredő mágneses térerősségi vektor iránya szimmetriaokok miatt megegyezik a tengely irányával. Ezért elegendő minden *dl* elem hatásának a *tengelyirányú vetületét* figyelembe venni. A *dl* elem az r° vektorral *derékszöget* alkot, tehát: $|dl \times r^\circ| = dl$ (237. ábra). Továbbá:

$$r^2 = a^2 + x^2, \qquad \sin \beta = \frac{a}{r},$$

ahol mind a β szög, mind az r távolság minden vonalelemre *ugyanakkora.* Ezek felhasználásával a keresett *mágneses térerősség:*

$$H = \frac{I \sin \beta}{4\pi r^2} \int_{(L)} dl = \frac{Ia}{4\pi r^3} \cdot 2a\pi =$$

$$= \frac{Ia^2}{2r^3} = \frac{Ia^2}{2(a^2 + x^2)^{3/2}};$$

ha $x \gg \alpha$, akkor H jó közelítéssel a pont és a körvezető síkja közötti *x távolság harmadik hatványával fordítottan arányos.*

3. HENGERES TEKERCS MÁGNESES TERE — BELSEJÉBEN

Az előbbi eredmény segítségével kiszámíthatjuk az *eredő mágneses térerősség* értékét az *egyenletes menetszám-eloszlású hengeres tekercs tengelye mentén.* (Mágneses szempontból az ilyen tér semmiben sem különbözik a 238. ábrán látható tömör hengerben folyó áram terétől.) Ha egy teljes tengelymetszeten (kétszer, ti. be- és kifelé) átfolyó összes áram:

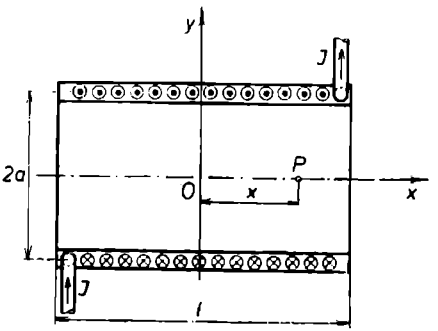
$$\Sigma I = nI,$$

ahol n a menetek száma, továbbá l a tekercs hossza, akkor a tekercs egy elemi $d\xi$ hosszúságú tengelymetszetén (kétszer) az $\frac{n}{l} I\,d\xi$ áram halad át, ahol a tengely mentén $-\frac{l}{2} \leqq \xi \leqq \frac{l}{2}$.

Az említett eredmény most már alkalmazható, mégpedig oly módon, hogy *I helyett* $\frac{n}{l} I\,d\xi$ és *x helyett* a pontnak a $d\xi$ elemtől mért távolsága, azaz $(x-\xi)$ *veendő.*

Következésképpen:

$$H = \frac{nIa^2}{2l} \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{d\xi}{[(\xi - x)^2 + a^2]^{3/2}}.$$



238. ábra

Ezen integrál $\xi - x = a$ tg φ *helyettesítés* után könnyen kiszámítható, és nyerjük, hogy:

$$H = \frac{nI}{2l} (\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2),$$

ahol

$$\sin \varphi_{1,2} = \frac{\frac{1}{2} l \mp x}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{l}{2} \mp x\right)^2}}$$

(a felső előjel $\sin \varphi_1$-hez, az alsó $\sin \varphi_2$-höz tartozik). *Míg a pont a tekercs belsejében van, nem közel a széléhez, a tér közelítőleg homogén marad:* ui. $l \to \infty$ esetén $\left(\text{amikor} \frac{x}{l} \text{ és } \frac{a}{l} \to 0\right)$:

$$\sin \varphi_1 \to \sin \varphi_2 \to 1,$$

és így:

$$H \to \frac{nI}{l} \quad [\neq f(\varphi_1, \varphi_2)],$$

vagyis a tér valóban homogén.

Ha a tekercs *egységnyi* hosszára $n_0 = \frac{n}{l}$ menet esik, akkor formulánk ilyen alakban is írható:

$$H = n_0 I.$$

Ugyanekkora a mágneses térerősség azon *tórusz* belsejében is, melynek felületén hosszegységenként n_0 menet van elhelyezve — feltéve, hogy a körszelvény a sugara csekély a súlyponti kör b sugarához képest (l. a köv. pl.-ban).

*4. TÓRUSZTEKERCS ÖNINDUKCIÓJA

Egy *körgyűrű alakú vasmag* mágneses permeabilitása μ, a körgyűrű középponti körének sugara b, a keresztmetszeti kör sugara a. A körgyűrűre n menetű, *sűrűn csévélt tekercs*et helyezünk el. Számítsuk ki a tekercs önindukcióját (239. ábra).

A *gerjesztési törvény* szerint

$$\int_{(S)} H_s \, ds = nI.$$

Ezt alkalmazva a gyűrűtest egy $\varrho = b - \cos\vartheta$ sugarú *belső körére* nyerjük:

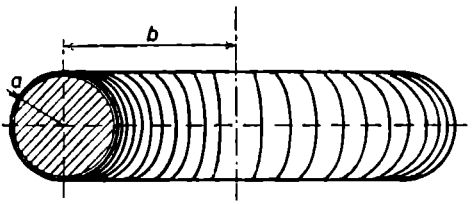
$$H 2\pi(b - r\cos\vartheta) = nI,$$

ahonnan a *mágneses térerősség:*

$$H = \frac{nI}{2\pi(b - r\cos\vartheta)} \quad (\approx n_0 I, \text{ ha } b \gg a \geqq r),$$

a *mágneses indukció* pedig (az említett kör mentén):

$$B = \mu H = \frac{\mu}{2\pi} \frac{nI}{b - r\cos\vartheta}.$$



239. ábra

Ezt először integráljuk egy rögzített $[r, r + dr]$ *körgyűrű mentén,* miközben $-\pi \leqq \vartheta \leqq \pi$ és $dT = r\,d\vartheta\,dr$:

$$d\Phi_1 = nI \frac{\mu}{2\pi} r\,dr \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\vartheta}{b - r\cos\vartheta} =$$

$$= nI \frac{\mu}{2\pi} r\,dr \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{b^2 - r^2}},$$

ahol a $t = \operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}$ helyettesítéssel éltünk. *Majd a teljes kör területén integrálunk,* miközben $0 \leqq r \leqq a$:

$$\Phi_1 = \mu nI \int_0^a \frac{r\,dr}{\sqrt{b^2 - r^2}} = \mu nI\left(b - \sqrt{b^2 - a^2}\right);$$

itt az $u = b^2 - r^2$ helyettesítést eszközöltük.

Ezzel megkaptuk a vasmagban az áram hatására keletkező *mágneses indukciófluxust.* A Φ_1-et az n menetszámmal szorozva, nyerjük az ún. *tekercsfluxust.* Ennek az *idő szerinti deriváltjával arányos az indukált elektromotoros erő:*

$$E = -n\frac{\Phi_1}{dt} = -\mu\left(b - \sqrt{b^2 - a^2}\right)n^2 \frac{dI}{dt},$$

és $E = -L\dfrac{dI}{dt}$ értelmében *a keresett önindukció:*

$$L = \mu\left(b - \sqrt{b^2 - a^2}\right)n^2.$$

9. §. INTEGRÁLÁS VÉGTELEN SOROK SEGÍTSÉGÉVEL

a) Főbb tételek*

α) Végtelen függvénysor tagonkénti integrálhatóságának feltétele

Említettük már, hogy *a véges függvénysor tagonként integrálható*. Ugyanez azonban *nem* mindig megengedett végtelen függvénysor esetén! — Foglaljuk össze röviden a *végtelen függvénysor* és speciálisan a végtelen hatványsor *tagonkénti integrálásának* feltételeit!

Tétel: Ha az $u_n(x)$ *függvények* $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ *az* $[a, b]$ *közön folytonosak, és a velük képzett*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

végtelen sor e közön egyenletesen összetartó, akkor e sor $f(x)$ *összegének integrálja előállítható ilyen alakban:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_b^{\infty} \int_a^b u_n(x) \cdot dx = \int_a^b u_1(x)\,dx + \int_a^b u_2(x)\,dx + \ldots + \int_a^b u_n(x)\,dx + \ldots$$

Ezen egyenlőség az

$$\int_a^b \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} u(x) \right\} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_a^b u_n(x)\,dx \right\}$$

alakban is írható. Eszerint a sor egyenletes összetartása esetén a sor összegének integrálja egyenlő azon sor összegével, amely az előbbi sor tagjainak integráljával állítható elő: *más szóval megengedett a sor tagonkénti integrálása!*

Tétel: Ha az $u_n(x)$ *függvények* $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ *integrálhatók az* $[a, b]$ *szakaszon és a velük képzett*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

* L. bővebben az A. VIII. kötetben!

sor ott egyenletesen összetartó, akkor e sor $f(x)$ összege is integrálható, és fennáll:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx = \int_a^b u_1(x)\,dx + \ldots + \int_a^b u_n(x)\,dx + \ldots .$$

β) Végtelen hatványsor integrálása

Vizsgáljuk e kérdést a

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

alakú vagy általánosabban a

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + \ldots + a_n (x - x_0)^n + \ldots$$

alakú *hatványsoroknál!* — Legyen a sor *összetartási sugara*: $R > 0$. — Emlékeztetünk továbbá a hatványsor ismert tulajdonságaira:* *a)* A hatványsor x-ben *egyenletesen összetartó* minden $[-r, r]$ közben, ahol $r < R$ és pozitív. *b)* A hatványsor $f(x)$ *összege* maga is x *folytonos függvénye*, minden — R és $+R$ közti x értékre. *c)* Ha a hatványsor *összetartási közének* $x = R$ *végén széttartó*, akkor a sor *összetartása* a $[0, R]$ közön *nem lehet egyenletes. d)* Ha viszont a sor az $x = R$-re *összetartó* (akár nem abszolúte is), akkor a sor *összetartása egyenletes marad* az egész $[0, R]$ közön. *e)* Ha a hatványsor az $x = R$ *értékre összetart*, akkor *összege* ezen x-re is *folytonos marad* (balról értve) (*Ábel tétele*).

Ezekkel kapcsolatos a bennünket most elsősorban érdeklő *tétel: A (fenti alakú) hatványsor a* $[0, x]$ *közön, ahol* $|x| < R$, *mindig integrálható tagonként, azaz:*

$$\int_0^x f(x)\,dx = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + \ldots + \frac{a_{n-1}}{n} x^n + \ldots .$$

Az x ilyenkor összeeshetik az összetartási köz egyik végével, ha itt a hatványsor összetartó!

Végül megemlítjük még a következő ***tételek***et:

A (fenti alakú) hatványsor összetartási közében tagonként differenciálható, azaz:

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots .$$

Ugyanez az összetartási köz végére is érvényes, ha ott az adott hatványsor összetartó. — Az olyan függvény, amely hatványsorba fejthető összetartási közén, akárhányszor differenciálható e köz belsejében. A hatványsor maga nem más, mint a szóban forgó függvény Taylor-sora.

Az olyan *függvény*t, amely az $(x - x_0)$ hatványai szerint haladó *Taylor-sorba fejthető*, az x_0 pontban *analitikus*nak mondjuk.

Példa

α) **1.** Vizsgáljuk meg, hogy *lehet-e szó tagonkénti integrálásról* az alábbi végtelen sor esetén!

$$u_1(x) = \cos x, \qquad u_2(x) = (2 \sin x - 1) \cos x,$$

* L. Фихтенгольц: i. m. II. kt., XII. fej., 409. p.

$$u_3(x) = (3\sin^2 x - 2\sin x)\cos x, \qquad u_4(x) = (4\sin^3 x - 3\sin^2 x)\cos x, \ \ldots,$$

$$u_n(x) = [n\sin^{n-1} x - (n-1)\sin^{n-2} x]\cos x, \ \ldots.$$

Itt *a sor összege:*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = 0,$$

mert minden egyes tagot szomszédjai kompenzálnak.

Ennélfogva:

$$\int_0^{\pi/2} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \int_0^{\pi/2} f(x)\,dx = 0.$$

Ezzel szemben *tagonként integrálva:*

$$\int_0^{\pi/2} u_1(x)\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = 1,$$

és $n > 1$ esetén:

$$\int_0^{\pi/2} u_n(x)\,dx = \int_0^{\pi/2} [n\sin^{n-1} x - (n-1)\sin^{n-2} x]\cos x\,dx =$$

$$= \int_0^1 [nt^{n-1} - (n-1)t^{n-2}]\,dt = n\frac{1}{n} - (n-1)\frac{1}{n-1} = 0;$$

tehát

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi/2} u_n(x)\,dx = 1 + 0 + 0 + \ldots = 1 \neq \int_0^{\pi/2} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = 0.$$

Az adott sor nyilvánvalóan *nem integrálható tagonként,* ui. a $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ szakaszon *nem konvergál egyenletesen.**

b) Gyakorlati megjegyzések**

α) Sorfejtés a derivált felhasználásával

Kedvelt eljárás, különösen a logaritmus-, arcus- és arcafüggvények *sorbafejtésére*, hogy e *függvények 1. deriváltjának* könnyen előállítható *sorát* — összetartási közén belül — *tagonként, változó felső határral, integráljuk.* — Az így nyert hatványsorokat felhasználjuk az említett elemi transzcendens *függvények kitüntetett értékeinek közelítő számítására*, kivált ha az illető sor gyorsan konvergál. Ilyenkor fontos állandók, pl. a π tetszőleges pontosságú meghatározására is mód nyílik.

* L. az A. VIII. kötetben!
** L. bővebben az A. VIII. kötetben!

β) Integrálás Taylor-sor segítségével

Különösen értékes olyan *függvények Taylor-sorának* tagonkénti integrálhatósága, amely függvények (pl. e^{-x^2}) *primitívje nem adható meg elemi függvényekkel, zárt alakban.* E sorokat hasonlóan közelítő számításra használjuk.

γ) Speciális sorok

A végtelen sorok segítségével történő határozott integrálásnál gyakran előnyösen alkalmazhatók bizonyos speciális, ismert összegű szám- és függvénysorok, ismert értékű határozott integrálok. Néhány fontosabbat itt közlünk:*

Euler sorai:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6};\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8};\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}.$$

Trigonometrikus sorok:

$$\frac{\sin x}{1-2a\cos x+a^2}=\sin x+a\sin 2x+a^2\sin 3x+\ldots;$$

$$\ln(1-2a\cos x+a^2)=-2\left[a\cos x+\frac{a^2}{2}\cos 2x+\frac{a^3}{3}\cos 3x+\ldots\right];$$

$$\frac{1-a^2}{1-2a\cos x+a^2}=1+2[a\cos x+a^2\cos 2x+a^3\cos 3x+\ldots].$$

Laplace integráljai:

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos ax\,dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}e^{-|a|};\qquad \int_0^{\infty}\frac{x\sin ax\,dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}e^{-|a|}\operatorname{sign}a.$$

Racionális törtfüggvények szerinti sorfejtések:

$$\frac{1}{\sin^2 x}=\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x+n\pi)^2};\qquad \operatorname{ctg}x=\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x}{x^2-\pi^2n^2};$$

$$\frac{1}{\sin x}=\frac{1}{x}-\frac{2x}{x^2-\pi^2}+\frac{2x}{x^2-4\pi^2}-\frac{2x}{x^2-9\pi^2}+-\ldots;$$

$$\frac{1}{\cos x}=-\frac{\pi}{x^2-\frac{\pi^2}{4}}+\frac{3\pi}{x^2-\frac{9\pi^2}{4}}-\frac{5\pi}{x^2-\frac{25\pi^2}{4}}+-\ldots;$$

$$\frac{1}{e^x-1}=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x}{x^2+4\pi^2n^2};$$

$$\frac{1}{\operatorname{sh}x}=\frac{1}{x}-\frac{2x}{x^2+\pi^2}+\frac{2x}{x^2+4\pi^2}-\frac{2x}{x^2+9\pi^2}+-\ldots;$$

$$\frac{1}{e^x+1}=\frac{1}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x}{x^2+\pi^2(2n+1)^2}.$$

* L. pl. *Gjunter—Kuzmin* i. m. II. kt. XI. fejezet. 5. §.

Példák és feladatok

α | **1—2.** Állítsuk elő az $\ln(1+x)$ és arc tg x *függvény hatványsorát*, deriváltjuk sorának felhasználásával!*

A deriváltak binomiális sorba fejtve:

$$[\ln(1+x)]' = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - + \ldots + (-1)^{n-1}x^{n-1} + \ldots,$$

és

$$(\operatorname{arc\,tg} x)' = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - + \ldots + (-1)^{n-1}x^{2(n-1)} + \ldots.$$

E sorokat a $[0, x]$ közön (ahol $|x| < 1$) *tagonként integrálva*, azonnal nyerjük a keresett sorbafejtéseket, szemben más, bonyodalmasabb eljárásokkal:

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots,$$

és

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots.$$

Megjegyzendő, hogy az első *sorbafejtés* $x = 1$-nél, a második pedig $x = \pm 1$-nél is érvényes marad, *Abel* említett tétele szerint!

3. Hasonló módon állítsuk elő az arc sin x *függvény hatványsorát*, majd használjuk fel a π *értékének* kiszámítására!*

A derivált:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2n!!} x^{2n},$$

ahol $-1 < x < 1$. *Tagonként integrálva*, nyerjük:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

ahol $(-1 < x < 1)$. Minthogy e sor $x = \pm 1$-*nél* is összetartó, a sorbafejtés érvényes, *Abel* tétele szerint, ezen értékekre is! Ennélfogva $x = 1$ esetén végtelen sort nyerünk a π *kiszámítására*:

$$\arcsin 1 = \frac{\pi}{2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \cdot \frac{1}{2n+1}.$$

* L. pl. Фихтенгольц, i. m. 406. p.

4. Hasonlóan igazoljuk, hogy

$$\operatorname{ar\,sh} x = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

ahol $-1 \leqq x \leqq 1$.

β 1. Határozzuk meg az $\int_0^x e^{-x^2}\,dx$ *integrált* (zárt alakú, elemi függvényekből felépíthető primitív függvény hiányában) az integrálandó végtelen *hatványsorának* tagonkénti *integrálása útján.*

Az integrálandó sora (e^x ismert sorának felhasználásával):

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \ldots.$$

Tagonként integrálva:

$$I(x) = \int_0^x e^{-x^2}\,dx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2!}\cdot\frac{x^5}{5} - + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots.$$

E *speciális* (nem elemi) *függvény* $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$-szerese nagy szerepet játszik a matematikai statisztikában *Gauss*-féle hibaintegrál néven. Jelölése:

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2}\,dx.$$

Később bővebben foglalkozunk vele!

2. Számítsuk ki az $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ határozott *integrál*t az előbb előállított *végtelen sor segítségével*, 0,0001 *pontossággal.*

Az integrál felső határa esetünkben $x = 1$ lévén, ennek behelyettesítésével a következő alternáló és csökkenő abszolút értékű tagokból álló számsort kapjuk:

$$I_1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \frac{1}{1320} + \frac{1}{9360} - \frac{1}{75\,600} + - \ldots.$$

Látható, hogy a 8. tag abszolút értéke már alacsonyabb a megadott hibahatárnál, így *elegendő csak az első 7 tagot figyelembe vennünk.* Ennek megfelelően a 7 taggal történő közelítés (esetünkben negatív) *hibá*jának abszolút értéke:

$$h < \frac{1}{75\,600} < \frac{1{,}5}{10^5}.$$

Kiszámítva a megtartott tagokat 5 tizedesjegynyi pontossággal, nyerjük (a fel- és lekerekítéseket is figyelembe véve):

$$1+\frac{1}{10}=1{,}100\,00 \qquad \frac{1}{3}=0{,}333\,33\,(+)$$

$$\frac{1}{216}=0{,}004\,63\,(-) \qquad \frac{1}{42}=0{,}023\,81\,(-)$$

$$\frac{1}{9360}=0{,}000\,11\,(-) \qquad \frac{1}{1320}=0{,}000\,76\,(-)$$

$$1{,}104\,74 \qquad 0{,}357\,90$$

Ezekkel:

$$\begin{array}{r} 1{,}104\,74 \\ -0{,}357\,90 \\ \hline 0{,}746\,84 \end{array}$$

Az összes hibákat számba véve írhatjuk:

$$0{,}746\,81 < I_1 < 0{,}746\,85.$$

A *végeredmény* tehát (az első négy tizedesjeggyel, az előírt pontosságnak megfelelően):

$$I_1 = 0{,}7468\ldots$$

3. Hasonló módon határozzuk meg az $\int_0^x \frac{\sin x}{x}\,dx$ integrált!

A $\frac{\sin x}{x}$ primitív függvénye szintén nem fejezhető ki elemi függvényekkel, zárt alakban.

Így a $\frac{\sin x}{x}$ *hatványsorát* állítjuk elő (a $\sin x$ sorát osztva x-szel):

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots,$$

és ezt *integráljuk tagonként:*

$$Si(x)=\int_0^x \frac{\sin x}{x}\,dx = x-\frac{x^3}{3\,!\,3}+\frac{x^5}{5\,!\,5}-+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)\,!\,(2n-1)}+\ldots.$$

Ezen ún. integrálsinus, néhány más, hasonló felépítésű függvénnyel együtt, fontos helyet foglal el a (később tanulmányozandó) *speciális függvény*ek között.

4. A most előállított sor segítségével állapítsuk meg a

$$Si(\pi)=\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,dx$$

határozott integrál értékét 0,0001 pontossággal!

Esetünkben a felső határ $x = \pi$ lévén, írhatjuk:

$$Si(\pi) = \pi - \frac{1}{18}\pi^3 + \frac{1}{600}\pi^5 - \frac{1}{35\,280}\pi^7 + \frac{1}{3\,265\,920}\pi^9 - \frac{1}{439\,084\,800}\pi^{11} + - \dots .$$

A 6. tag 0,0001-nél kisebb lévén, csak az első 5 tagra szorítkozunk. Ezek értéke 4 tizedesjegynyi pontossággal:

$$\pi = 3{,}1416\ (-)$$

$$\frac{1}{600}\pi^5 = 0{,}5100\ (+)$$

$$\frac{1}{3\,265\,920}\pi^9 = 0{,}0091\ (+)$$

$$3{,}6607$$

$$\frac{1}{18}\pi^3 = 1{,}7226\ (-)$$

$$\frac{1}{35\,280}\pi^7 = 0{,}0856\ (+)$$

$$1{,}8082$$

$$3{,}6607$$

$$-\,1{,}8082$$

$$1{,}8525$$

A hibákat számba véve, írhatjuk végül:

$$1{,}8517 < Si(\pi) < 1{,}8527, \qquad Si(\pi) = 1{,}852 \pm 0{,}001.$$

5. Állapítsuk meg a $G = \int_0^1 \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}\,dx$ határozott integrál értékét, az arc tg x függvény b) α) 2. pl.-ban előállított sorának felhasználásával.

$$G = \int_0^1 \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}\,dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{5}x^4 - \frac{1}{7}x^6 + - \dots\right)dx =$$

$$= 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} = 0{,}915\,965\dots ,$$

Ez az ún. *Catalan*-állandó. Megjegyezzük, hogy az integrálandó sor $x = 1$-*nél összetartó*, és így a *tagonkénti integrálás jogos volt.*

6. Meghatározandó az $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx$ határozott integrál értéke!

A b) α) 1. példa szerint (osztva x-szel):

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - + \dots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^{n-1} + \dots ,$$

mely érvényes az egész [0, 1] közre. Tagonként integrálva nyerjük:

$$I = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - + \dots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n^2} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{n^2} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{6} - 2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{12}.$$

7. $\int_0^1 \cos \sqrt{x}\, dx = ?$ — A cos x *Taylor*-sorában x helyébe mindenütt $\sqrt{x}$-et írunk, majd tagonként integrálunk.

8. $\int_0^{\frac{1}{4}} \ln\left(1+\sqrt{x}\right) dx = ?$ — Az $\ln(1+x)$ sorában x helyébe $\sqrt{x}$ teendő.

9. $\int_0^{\frac{1}{5}} \frac{\sin x}{\sqrt{1-x}}\, dx = ?$ — A sin x és $(1-x)^{-1/2}$ sora összeszorzandó.*

10. $\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{4}}\, dx = ?$

11. $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\, dx = ?$

12. $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{\ln x}{x-1}\, dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1+t)}{t}\, dt = ?$

13. $\int_{0,0}^1 \frac{\ln x}{1-x}\, dx = ?$

14. $\int_0^{\frac{1}{5}} \frac{\sin x\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = ?$

15. $\int_0^1 \sin x^2\, dx = ?$

16. $\int_0^x \cos x^2\, dx = ?$

* A végtelen sorok szorzását l. az A. VIII. kt.-ben.

17. $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2-\cos x}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \left(1-\frac{1}{2}\cos x\right)^{-\frac{1}{2}} dx = ?$$

*

* *

18. $I = \int_0^{\pi/6} \cos^{5/4} x \, dx = ?$* — Az integrálandót átalakítjuk, majd az $u = \sin x$ helyettesítést alkalmazzuk:

$$I = \int_0^{\pi/6} \cos x (\sqrt{1-\sin^2 x})^{1/4} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (1-u^2)^{1/8} du.$$

Az új integrálandót *binomiális* sorba fejtjük, majd tagonként integrálunk:

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \left[1 - \frac{1}{8}u^2 + \binom{1/8}{2}u^4 + \ldots + \binom{1/8}{n}(-1)^n u^{2n} + \ldots\right] du =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{3\cdot 2^3} + \binom{1/8}{2}\frac{1}{5\cdot 2^5} + \ldots \approx 0{,}494\,41.$$

*19. Kiszámítandó $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\cos x} = \ln \operatorname{tg} \frac{\pi+1}{4}$ értéke sorbafejtéssel!

Az $\frac{1}{\cos x}$ függvény *Taylor-sora* e függvény párossága miatt

$$\frac{1}{\cos x} = a_0 + a_2 x^2 + \ldots + a_{2n}x^{2n} + \ldots$$

alakú, ahol $a_0, a_2, \ldots$ egyelőre ismeretlen együtthatók.

Most a végtelen sorok szorzási szabálya szerint**, cos x ismert *Taylor*-sorával:

$$1 = (a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \ldots + a_{2n}x^{2n} + \ldots)\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots\right) =$$

$$= \left[a_0 + \left(a_2 + \frac{a_0}{2!}\right)x^2 + \left(a_4 - \frac{a_2}{2!} + \frac{a_0}{4!}\right)x^4 + \ldots\right].$$

A bal és jobb oldal megfelelő együtthatóit egyeztetve, nyerjük az ismeretlen együtthatókra:

$$a_0 = 1, \qquad a_2 = \frac{a_0}{2!} = \frac{1}{2!},$$

$$a_4 = \frac{a_2}{2!} - \frac{a_0}{4!} = \frac{1}{(2!)^2} - \frac{1}{4!} = \frac{1}{4} - \frac{1}{24} = \frac{5}{24}; \ldots$$

* L. e pl. és néhány további: *Rothe* i. m.
** L. az A. VIII. kötetben.

Ezeket beírva $\frac{1}{\cos x}$ hatványsorába, majd tagonként integrálva, kapjuk végül:

$$I=\left[x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{24}+\ldots\right]_0^{1/2}\approx 0{,}522.$$

***20.** A *matematikai inga lengésidejének* számításánál szerepel a következő ún. *elsőfajú teljes elliptikus integrál:**

$$T=2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}},$$

ahol $k=\sin\frac{\varepsilon}{2}$ és ε a lengési amplitúdó. Az integrálandó binomiális sorba fejtve:

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}=(1-k^2\sin^2 t)^{-\frac{1}{2}}=$$

$$=1+\frac{1}{2}k^2\sin^2 t+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}k^4\sin^4 t+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}k^6\sin^6 t+\ldots.$$

Ezt kell tagonként integrálni! Ha $\varepsilon\approx 0$, s így $k\approx 0$, akkor:

$$T\approx 2\sqrt{\frac{l}{g}}\left[t\right]_0^{\pi/2}=\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

ami az elemekből *ismert eredmény.*

***21.** Kiszámítandó az

$$I=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\frac{3}{4}\sin^2 2\varphi}\,d\varphi$$

*másodfajú teljes elliptikus integrál** közelítő értéke, hatványsor segítségével!

Az integrálandó binomiális sora:

$$\left(1-\frac{3}{4}\sin^2 2\varphi\right)^{\frac{1}{2}}=1-\binom{1/2}{1}\frac{3}{4}\sin^2 2\varphi+\binom{1/2}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^2(\sin^2 2\varphi)^2-\binom{1/2}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^3(\sin^2 2\varphi)^3+$$

$$+\ldots=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\sin^2 2\varphi-\frac{1}{2\cdot 4}\left(\frac{3}{4}\right)^2\sin^4 2\varphi-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\left(\frac{3}{4}\right)^3\sin^6 2\varphi-\ldots.$$

E sor a $2\varphi\leqq\pi$ esetben konvergens, így az egész integrációs tartományban egyenletesen konvergens, tehát tagonként integrálható.

* L. bővebben a B. VI. kötetben.

Továbbá a $2\varphi = u$ helyettesítéssel:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} 2\varphi \, d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin^{2n} u \, du = 2 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} u \, du =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} u \, du = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n} \cdot \frac{\pi}{2}$$

(l. az 1. § d. β) 1. példát).

Ezen eredményeket a tagonkénti integrálás során felhasználva, nyerjük végül:

$$I = \frac{\pi}{2}\left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 - \frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{7}\left(\frac{3}{4}\right)^4\left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}\right)^2 - \ldots\right] =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[1 - 3\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{3}3^2\left(\frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 8}\right)^2 - \frac{1}{5}3^3\left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{4 \cdot 8 \cdot 12}\right)^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{7}3^4\left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 16}\right)^2 - \ldots\right] \approx 1{,}22.$$

*22. Kiszámítandó a *sinusgörbe* $s(0, x_1)$, majd $s(0, \pi)$ ívhossza! — A 4. § α_1)-ben közölt képlet szerint:

$$s(0, x_1) = \int_0^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \int_0^{x_1} \sqrt{1 + \cos^2 x}\, dx = \sqrt{2}\int_0^{x_1} \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2 x}\, dx.$$

A továbbiakban az előbbi példához hasonlóan járunk el. $s(0, \pi) \approx 3{,}805$.

*23. Kiszámítandó: $I = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$. — Alkalmazzuk a $\sin x = \cos^2 \varphi$ helyettesítést; ekkor:

$$\cos x \, dx = -2 \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi,$$

$$dx = -\frac{2 \sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{1 - \cos^4 \varphi}}\, d\varphi = -\frac{2 \sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{(1 - \cos^2 \varphi)(1 + \cos^2 \varphi)}}\, d\varphi = -2\frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 + \cos^2 \varphi}}\, d\varphi.$$

Ezekkel:

$$I = -\int_{\pi/2}^{0} \frac{2 \cos \varphi \, d\varphi}{\cos \varphi \sqrt{1 + \cos^2 \varphi}} = 2\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 + \cos^2 \varphi}} = \sqrt{2}\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2 \varphi}}.$$

A további számítást a 20. példa szerint végezzük. Így nyerjük végül: $I \approx 2{,}624$.

***24.** Fejezzük ki az e excentricitás hatványai szerint haladó sorral az $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ paraméteres egyenletrendszerű *ellipszis ívhosszát*!

***25.** Alakítsuk az *elsőfajú elliptikus integrállá* az

$$I = \int_0^{z_1} \frac{dz}{\sqrt{1 - z^4}}$$

lemniszkátikus integrált! — Alkalmazzuk a $z = \operatorname{tg}\varphi$ helyettesítést; ekkor:

$$dz = \frac{1}{\cos^2\varphi}\, d\varphi.$$

Ezzel:

$$I = \int_0^{\varphi_1} \frac{\frac{1}{\cos^2\varphi}\, d\varphi}{\sqrt{(1 + \operatorname{tg}^2\varphi)(1 - \operatorname{tg}^2\varphi)}} = \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi \sqrt{\frac{1}{\cos^2\varphi}\left(\frac{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}\right)}} =$$

$$= \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} = \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - 2\sin^2\varphi}}.$$

Ez már *elsőfajú elliptikus integrál*. (Az utolsó lépésben felhasználtuk a $\sin^2\varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}$ azonosságot.)

***26.** Az $y = ax^2$ *parabola* $s(0, x)$ *ívhosszának mérésére* $\left(x < \frac{1}{2a}\right)$ levezetünk egy *közelítő szerkesztési eljárást*.

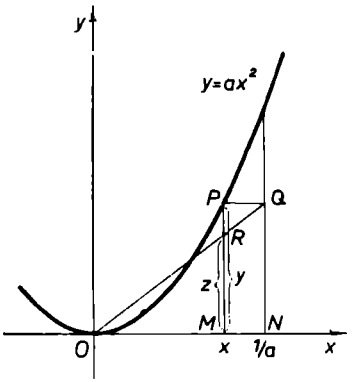
A 240. ábrán látható módon a P pontból párhuzamost húzunk az x tengellyel, ez az $x = \frac{1}{a}$ egyenest a Q pontban metszi. Az OQ rádiuszvektor a P pont ordinátájából az $MR = z$ darabot vágja le. Az OP parabolaív közelítőleg $s \approx x + \frac{2}{3}z$ hosszúságú. Igazoljuk ezt!

A 4. § α_1)-ben megadott képlet szerint:

$$\widehat{OP} = s(0, x) = \int_0^x \sqrt{1 + 4a^2x^2}\, dx =$$

$$= \int_0^x \left[1 + \binom{1/2}{1} 4a^2x^2 + \binom{1/2}{2} 4^2a^4x^4 + \dots\right] dx,$$

ahol az integrálandót binomiális sorba fejtettük. Rendezve, majd tagonként integrálva, nyerjük:



240. ábra

$$\widehat{OP} = \int_0^x (1 + 2a^2x^2 - 2a^4x^4 + \ldots)\, dx =$$

$$= x + \frac{2}{3}a^2x^3 - \frac{2}{5}a^4x^5 + \ldots.$$

Ha $2ax < 1$, akkor csak az első két tagra szorítkozva:

$$\widehat{OP} \approx x + \frac{2}{3}a^2x^3.$$

A 240. ábrán látható, hogy (az OMR és ONQ háromszögek hasonlósága folytán):

$$\frac{MR}{OM} = \frac{NQ}{ON}, \quad \text{azaz} \quad z : x = y : \frac{1}{a},$$

lévén $NQ = MP = y$. Ebből:

$$z = \frac{xy}{\frac{1}{a}} = xya = x \cdot ax^2 \cdot a = a^2x^3.$$

A kérdezett ívhossz tehát valóban:

$$s = \widehat{OP} \approx x + \frac{2}{3}a^2x^3 = x + \frac{2}{3}z.$$

10. §. IMPROPRIUS INTEGRÁLOK*

a) Végtelen határú improprius integrálok

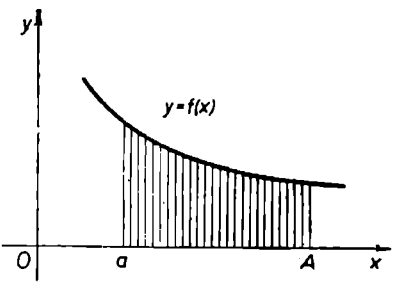
α) Határozott integrálás végtelen szakaszon

α_1) Az eddig megismert $\int_a^b f(x)\,dx$ határozott integrálokban az integrálás $[a, b]$ szakasza *véges*, az integrálandó $f(x)$ függvény pedig *korlátos* volt. Geometriailag ez korlátos síkrészek területmérését jelentette. Most e fogalmak *általánosítás*ára törekszünk.

Legyen $f(x)$ függvény értelmezve az $[a, +\infty]$ közön, azaz minden $x \geqq a$-ra és legyen *Riemann* szerint integrálható e köz tetszés szerinti $[a, A]$, $A > a$ véges szakaszán, azaz $\int_a^A f(x)\,dx$-nek legyen értelme (geometriailag ez az $[a, A]$ szakasz menti görbe alatti terület mérőszáma) (241. ábra).

Definíció: *Ha az* $A \to +\infty$ *határátmenetnél ezen integrál egy véges határértékhez tart, akkor e határértéket az* $f(x)$ *függvény* a*-tól* $+\infty$*-ig terjedő szakaszon vett integráljának nevezik* (geometriailag ez az a helytől jobbra eső görbe alatti terület mérőszáma). E határértéket az

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A \to +\infty} \int_a^A f(x)\,dx$$



241. ábra

szimbólummal jelöljük; magát az integrált *létező*nek, *összetartó*nak, *konvergens*nek, az $f(x)$ függvényt az $[a, +\infty]$ végtelen szakaszon *integrálható*nak mondjuk, s végül — a közönséges határozott *integrál*tól megkülönböztetendő — ***improprius integrál*** névvel illetjük.

* Фихтенгольц i. m. nyomán,

Ha nincs ilyen határérték, vagy pedig végtelen értékű, az integrált *nem létező*nek, *széttartó*nak, *divergens*nek, a görbe alatti területet nem mérhetőnek nevezzük.

Hasonló értelemben beszélünk az $f(x)$ függvény $-\infty$-től a-ig vett integráljáról:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{A' \to -\infty} \int_{A'}^{a} f(x)\,dx,$$

továbbá $-\infty$-től $+\infty$-ig vett integráljáról:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{A' \to -\infty \\ A \to +\infty}} \int_{A'}^{A} f(x)\,dx.$$

Ez utóbbi, tetszés szerinti a-val, így is írható:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A' \to -\infty} \int_{A'}^{a} f(x)\,dx + \lim_{A \to +\infty} \int_{a}^{A} f(x)\,dx.$$

α_2) Ha az $[a, +\infty]$ közön értelmezett és annak bármely véges (a, A) szakaszán integrálható $f(x)$ *függvénynek létezik* $F(x)$ *primitív függvénye* a teljes $[a, +\infty]$ közön, amellyel az integrálszámítás alaptétele szerint:

$$\int_{a}^{A} f(x)\,dx = F(A) - F(a) = \Big[F(x)\Big]_{a}^{A},$$

akkor az $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ *improprius integrál csakis akkor létezik, ha* $F(A)$ az $A \to +\infty$ határátmenetkor [$F(+\infty)$ módon jelölt] *véges határértékhez tart:*

$$\lim_{A \to +\infty} F(A) = F(+\infty).$$

Ekkor ugyanis:

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx = F(+\infty) - F(a) = \Big[F(x)\Big]_{a}^{+\infty},$$

és hasonló feltételekkel:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_{-\infty}^{a}, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_{-\infty}^{+\infty}.$$

β) Az improprius integrál létezésének feltételei és kritériumai

β_1) Az $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ *létezésének kérdése*, mint láttuk, a

$$\lim_{A \to +\infty} \int_a^A f(x)\,dx$$

véges határérték létezésének kérdésére vezet. Ez utóbbi kérdésre alkalmazva a *Bolzano-Cauchy-kritérium*ot, mondhatjuk:

Az $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *improprius integrál létezésének szükséges és elégséges feltétele az, hogy bármilyen kicsiny adott* $\varepsilon > 0$*-hoz található legyen egy olyan* $A_0 > a$ *szám, amelynél nagyobb* A *és* A' (azaz $A > A_0$ és $A' > A_0$) *esetén fennáll a következő egyenlőtlenség:*

$$|F(A') - F(A)| = \left| \int_a^{A'} f(x)\,dx - \int_a^{A} f(x)\,dx \right| = \left| \int_A^{A'} f(x)\,dx \right| < \varepsilon.$$

Ebből *következik* továbbá: *Ha létezik* $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ *integrál, akkor* bizonyíthatóan szintén *létezik az* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *integrál is.* Fontos megjegyezni, hogy e tétel *fordítva általában nem* igaz! — *Ha az* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *integrállal együtt az* $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ *is létezik, akkor az* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *integrált abszolút összetartónak,* az $f(x)$ függvényt abszolút integrálhatónak *nevezzük.*

Az előbbiekből *következik* még: 1. Az $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ létezéséből folyik $\int_{a_0}^{+\infty} f(x)\,dx$ létezése ($a_0 > a$), és fordítva is, ha az $\int_{a_0}^{a} f(x)\,dx$ létezik. 2. Az $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ létezéséből folyik $\int_a^{+\infty} cf(x)\,dx$-é, ahol $c = \text{const}$. 3. Ha $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ és $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ létezik, az $\int_a^{+\infty} [f(x) \pm g(x)]\,dx$ szintén létezik.

β_2) Kapcsolat a végtelen sorokkal. A véges határérték ***kritérium***ához egy A_n végtelen sorozattal képzett $\sum_{n+1}^{\infty} \int_{A_{n-1}}^{A_n} f(x)\,dx$ végtelen sor révén is eljuthatunk, így:

az $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *létezésének szükséges és elégséges feltétele az, hogy a tetszőleges* $A_n \to +\infty$ *sorozattal képzett*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_{n-1}}^{A_n} f(x)\,dx \qquad (A_0 = a)$$

sor egyazon véges határértékhez konvergáljon. E limes egyszersmind az improprius integrál értéke.

Ha $f(x)$ *pozitív,* akkor *egyetlen speciális* $A_n \to +\infty$ sorozattal képzett sor összetartása elégséges.

Az improprius integrálok kapcsolata a *végtelen sorok*kal azzal az előnnyel jár, hogy ez utóbbiakra vonatkozó *számos konvergenciakritérium*ot az előbbieknél is felhasználhatunk.

β_3) Improprius integrálok összehasonlításán alapuló konvergencia-kritériumok. Az alábbiakban *feltételezzük az* $\int_a^A f(x)\,dx$, $A < \infty$ *létezését;* kérdés, *létezik-e ugyanakkor az* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$. Egyelőre $f(x)$ legyen *pozitív!*

Tétel: *Ha* $x \geqq a$ *esetén fennáll az* $f(x) \leqq \varphi(x)$ *egyenlőtlenség, akkor az* $\int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ *konvergenciájából következik az* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *konvergenciája,* illetve az utóbbi divergenciájából az előbbi divergenciája. Elég a vizsgálatot tetszőleges $x \geqq a_0$ értéktől kezdve végezni, ahol $a_0 > a$.

Következmény: *Ha létezik a* $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = c$, $0 \leqq c < +\infty$ *határérték,* akkor *az* $\int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ *konvergenciájából,* $c < +\infty$*-nél, következik az* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *konvergenciája;* viszont az első divergenciájából $c > 0$-nál következik a másodiké.

Gyakorlati jelentőségű összehasonlító függvény az $\frac{1}{x^{\lambda}}$; ez integrálható a-tól $+\infty$-ig, ha $\lambda > 1$, és nem integrálható ott, ha $\lambda \leqq 1$. Ezt használja fel a *Cauchy-próba: Legyen elég nagy x-eknél* $f(x) = \frac{g(x)}{x^{\lambda}}$, $\lambda > 0$ *alakú; akkor:*

1. *ha* $\lambda > 1$ *és* $g(x) \leqq C < +\infty$, *az* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *összetartó,*

2. *ha pedig* $\lambda \leqq 1$ és $g(x) \geqq C > 0$, *akkor ez az integrál széttartó.*

Itt tehát az összehasonlító függvény: $\varphi(x) = 1/x^{\lambda}$.

Ha $x \to \infty$*-nél* $f(x)$ *(az* $1/x$*-hez viszonyítva)* $0 < \lambda$*-rendű végtelen kicsiny,* akkor az* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *aszerint konvergens vagy divergens, amint* $\lambda > 1$, *vagy* $\lambda \leqq 1$.

Az $f(x)$ *előjelváltása esetén* a fentebbi kritériumok nem alkalmazhatók. Ekkor azonban a mindig pozitív $|f(x)|$ *függvény* $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ *integrálja vizsgálható*, melynek konvergenciájából következik az $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ (abszolút) konvergenciája.

Az előzőkből *következik: Ha* $f(x)$ *az* $[a, +\infty]$ *közön abszolút integrálható, továbbá* $g(x)$ *korlátos, akkor az* $f(x)\,g(x)$ *szorzat ott ugyancsak abszolút integrálható.*

Ha *előjelváltó* $f(x)$ függvény esetén $\int_a^{+\infty} f\,|(x)|\,dx$ *nem létezik*, akkor a fentebbi kritériumok mind *használhatatlanok*.

β*)* Finomabb kritérium. A 2. középértéktételre és az *Abel—Dirichlet*-féle konvergenciakritériumra támaszkodik. Lehetővé teszi improprius integrálok konvergenciájának megállapítását akkor is, amikor az *abszolút konvergencia nem forog fenn.*

Legyen az $[a, +\infty)$ közön értelmezve $f(x)$ és $g(x)$, továbbá legyen $f(x)$ integrálható

* Azaz $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^{\lambda}}} = \lim_{x \to \infty} f(x)\,x^{\lambda} = \text{const} \neq 0$.

bármely véges $[a, A]$ szakaszon. Akkor fennáll e ***kritérium:*** *Ha* $F(A) = \int_a^A f(x)\,dx$ *integrál* A*-nak korlátos függvénye, azaz:*

$$|F(A)| = \left|\int_a^A f(x)\,dx\right| \leqq K = \text{const}, \qquad a \leqq A < +\infty,$$

továbbá $g(x)$ *monoton függvény, és* $x \to +\infty$*-nél* $g(x) \to 0$, *akkor az* $\int_a^\infty f(x)g(x)\,dx$ *konvergens.*

— Más feltételek mellett e ***kritérium:*** *Ha az* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *konvergens (akár nem abszolúte is),* *és* $g(x)$ *monoton és korlátos függvény,* $|g(x)| \leqq L$, $a \leqq x < +\infty$, *akkor az* $\int_a^\infty f(x)\,g(x)$ *konvergens.*

Példák és feladatok

α | α_1) **1.** $I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = ?$ — Az α_1)-ben közölt *definíció* szerint:

$$I = \lim_{A \to +\infty} \int_1^A \frac{dx}{x^2} = \lim_{A \to \infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^A = \lim_{A \to +\infty} \left[-\frac{1}{A} + 1\right] = 1,$$

minthogy $\lim_{A \to +\infty} \left(-\frac{1}{A}\right) = 0.$

Mivel e határérték véges, az integrált konvergensnek mondjuk.

2. $I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = ?$ — Hasonló módon nyerjük:

$$I = \lim_{A \to +\infty} \int_1^A \frac{1}{x}\,dx = \lim_{A \to \infty} [\ln A - \ln 1] = \infty,$$

mert $\lim_{A \to \infty} \ln A = \infty.$

A határérték végtelen lévén, az integrált *divergens*nek mondjuk.

3. $I=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{a^2+x^2}=?$ — A fentebbi módon járunk el:

$$I=\lim_{A\to+\infty}\int_0^A\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\lim_{A\to+\infty}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}\right]_0^A=\frac{1}{a}\cdot\frac{\pi}{2},$$

lévén $\lim\limits_{A\to+\infty}\operatorname{arc\,tg}\frac{A}{a}=\frac{\pi}{2}$.

4. $$\int_0^{\infty}\frac{8a^3\,dx}{x^2+4a^2}=\lim_{A\to+\infty}\left[4a^2\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2a}\right]_0^A=\lim_{A\to+\infty}4a^2\operatorname{arc\,tg}\frac{A}{2a}=2a^2\pi.$$

5. $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}=\lim_{A\to+\infty}\left[\operatorname{arc\,tg}(x+1)\right]_{-A}^{+A}=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi.$$

6. $$\int_0^{+\infty}e^{-ax}\,dx=\lim_{A\to+\infty}\left[\frac{1}{a}e^{-ax}\right]_A^0=\frac{1}{a}\lim_{A\to+\infty}[1-e^{-aA}]=\frac{1}{a}.$$

7. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^4}=?$

8. $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t(1+t)^2}=?$ **9.** $\int_0^{\infty}\frac{dx}{(a+x)^n}=?$ $(n>1)$.

α_2) **10.** $I=\int_0^{\infty}e^{-ax}\sin bx\,dx=?$ $(a>0)$ — Az A. IV./3. § *b) δ)* szerint az integrálandó egy primitív függvénye:

$$F(x)=-\frac{a\sin bx+b\cos bx}{a^2+b^2}e^{-ax}.$$

Ezzel a keresett integrál:

$$I=\lim_{A\to+\infty}[F(A)-F(0)]=0-\left(-\frac{b}{a^2+b^2}\right)=\frac{b}{a^2+b^2}.$$

Az integrál tehát *konvergens*.

11. $I=\int_3^{+\infty}\frac{dx}{x^2-3x+2}=?$ — Az A. IV./4. § *c)* szerint az integrálandó részlettörte alakja:

$$\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}.$$

Ennek egy primitív függvénye nyilván:

$$F(x)=\ln\frac{x-2}{x-1}.$$

Következésképpen a kérdezett integrál:

$$I=\lim_{A\to+\infty}\ln\left[\frac{x-2}{x-1}\right]_3^A=\lim_{A\to+\infty}\left[\ln\frac{A-2}{A-1}\right]-\ln\frac{1}{2}=\ln 1-\ln\frac{1}{2}=\ln 2.$$

Tehát ez az integrál is *konvergens.*

12. $I=\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^4}=?$ — Az A. IV./4. § *c)* γ_3*)* 11. példa szerint:

$$F(x)=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\left(x\sqrt{2}+1\right)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\left(x\sqrt{2}-1\right).$$

Ennek felhasználásával:

$$I=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

13. $I=\int_{2/\pi}^{\infty}\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,dx=?$ — Az $u=\frac{1}{x}$ helyettesítést alkalmazva:

$$I=\left[\cos\frac{1}{x}\right]_{2/\pi}^{\infty}=1.$$

14. $I=\int_0^{\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^3}\,dx=?$ — Az integrálandót $\frac{1}{2}\,\frac{2x}{(1+x^2)^3}\ln x$ módon átalakítva és parciálisan integrálva:

$$I=-\frac{1}{4}\,\frac{\ln x}{(1+x^2)^2}+\frac{1}{4}\ln x-\frac{1}{8}\ln(1+x^2)+\frac{1}{8}\,\frac{1}{1+x^2}.$$

Folytassuk:

15. $\int_0^{\infty}\sin x\,dx=?$ **16.** $\int^{\infty}\frac{dx}{x^2(1+x)}=?$

17. $\int_0^{\infty} xe^{-x}\,dx = ?$

18. $\int_0^{\infty} x^3e^{-x}\,dx = ?$

19. $\int_0^{\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx = ?$

20. $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2} = ?$

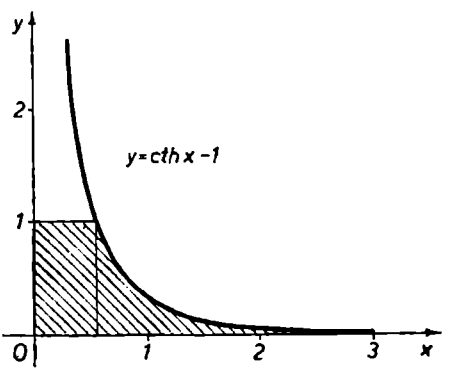
21. $\int_0^{\infty} e^{-\sqrt{x}}\,dx = ?$

22. $\int_0^{+\infty} x\sin x\,dx = ?$

23. $I = \int_{-\infty}^{0} e^{x}\,dx = ?$

*24. Meghatározandó a 242. ábrán látható terület x tengely körüli *megforgatása* által keletkezett *test térfogata*. (Határgörbék: az $y = \operatorname{cth} x - 1$, $x = 0$, $y \neq 0$ és $y = 1$.)

A test egy *hengerből* áll, melynek magassága 1, alapja pedig $x = \operatorname{ar\,cth}(y+1) = \operatorname{ar\,cth} 2$, térfogata V_1; és egy *végtelenbe nyúló térfogatdarab*ból, jelöljük ezt V_2-vel. A teljes térfogat: $V = V_1 + V_2$.



242. ábra

$$V_1 = \pi \cdot 1 \cdot \operatorname{ar\,cth} 2,$$

és

$$V_2 = \pi \int_{\operatorname{ar\,cth} 2}^{+\infty} (\operatorname{cth} x - 1)^2\,dx = \pi \int_{\operatorname{ar\,cth} 2}^{\infty} (\operatorname{cth}^2 x - 2\operatorname{cth} x + 1)\,dx.$$

Átalakítva:

$$V_2 = \pi \int_{\operatorname{ar\,cth} 2}^{\infty} \frac{\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x - 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x}\,dx = \pi \int_{\operatorname{ar\,cth} 2}^{\infty} \frac{1 + \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{sh}^2 x - 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x}\,dx =$$

$$= \pi \int_{\operatorname{ar\,cth} 2}^{\infty} \left[\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} + \frac{2\operatorname{sh} x(\operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x)}{\operatorname{sh}^2 x}\right] dx = \pi \int_{\operatorname{ar\,cth} 2}^{\infty} \left[\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} + 2(1 - \operatorname{cth} x)\right] dx =$$

$$= \pi \lim_{A \to \infty} \left[-\operatorname{cth} x + 2(x - \ln \operatorname{sh} x)\right]_{\operatorname{ar\,cth} 2}^{A}.$$

A behelyettesítési és határértékek:

$$\operatorname{cth}(\operatorname{ar\,cth} 2) = 2 \quad \text{és} \quad \operatorname{ar\,cth} 2 = \ln \sqrt{\frac{2+1}{2-1}} = \ln \sqrt{3},$$

s ezzel:

$$\operatorname{sh}(\operatorname{ar}\operatorname{cth} 2) = \operatorname{sh} \ln \sqrt{3} = \frac{e^{\ln\sqrt{3}} - e^{-\ln\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{3-1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

továbbá:

$$\lim_{A\to\infty} \operatorname{cth} Q = 1,$$

és végül:

$$\lim_{A\to\infty} [A - \ln \operatorname{sh} A] = \lim_{A\to\infty} \left[A - \ln \frac{e^A - e^{-A}}{2}\right] =$$

$$= \lim_{A\to\infty} [\ln e^A - \ln (e^A - e^{-A}) + \ln 2] = \lim_{A\to\infty} [\ln 2 - \ln (1 - e^{-2A})] = \ln 2.$$

Ezek felhasználásával adódik:

$$V = V_1 + V_2 = \pi\left(\ln\sqrt{3} - 1 + 2\ln 2 + 2 - 2\ln\sqrt{3} + 2\ln\frac{\sqrt{3}}{3}\right) =$$

$$= \pi\left(1 + 2\ln 2 - \frac{2}{3}\ln 3\right) \approx 2{,}319\,66.$$

β | *Vizsgáljuk meg az alábbi integrálokat a fentebb előadottak felhasználásával konvergencia szempontjából:*

1. $\int_0^\infty \frac{x^{3/2}}{1+x^2}\,dx$. — Az $x \to +\infty$-nél az integrandus $\frac{1}{x^\lambda} = \frac{1}{x^{1/2}}$ hatványként enyészik el, s így a $\lambda < 1$ lévén, az integrál *divergens* (*Cauchy-próba*).

2. $\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$. — Az $x \to +\infty$-nél az integrandus $\frac{1}{x^2}$-ként enyészik el; így $\lambda > 1$ lévén, az integrál *konvergens*.

3. $\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\lambda}\,dx$, $\lambda > 1$. — Itt $f(x) = \sin x$, $F(A) = \left|\int_0^A f(x)\,dx\right| = |\cos a - \cos A| \leqq 2$; vagyis $F(A)$ korlátos. A $g(x) = \frac{1}{x^\lambda} \to 0$, amikor $x \to +\infty$. A β_3) szerint tehát az integrál *konvergens*. Hasonló megállapítást tehetünk az $\int_a^{+\infty} \frac{\cos x\,dx}{x^\lambda}$ integrálra.

4. $\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{k^2+x^2}\,dx$. — Ezen integrál *abszolút konvergens*, mert az $f(x)=\frac{1}{k^2+x^2}=f(x)$ abszolút integrálható ($x\to+\infty$-nél $\frac{1}{x^2}$-ként elenyésző) és a $g(x)=\cos ax$ korlátos $[-1\leqq g(x)\leqq+1]$.

5. $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}\,dx$. — Esetünkben $g(x)=\operatorname{arc\,tg} x$ korlátos $\left[-\frac{\pi}{2}<g(x)<\frac{\pi}{2}\right]$ és $\frac{1}{x^{\lambda}}=\frac{1}{x}$, azaz $\lambda=1$ (a $+\infty$-ben elsőrendűen elenyésző); tehát a *Cauchy*-próba szerint az integrál *divergens*.

6. $\int_0^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{z(z-a)(z-b)}}$. — Most $g(z)=1$ és $\lambda=\frac{3}{2}>1$, vagyis az integrandus $z\to+\infty$-nél $^3/_2$-rendűen elenyésző; így az integrál *konvergens*.

7. $\int_0^{\infty} \left(e^{-\frac{a^2}{x^2}}-e^{-\frac{b^2}{x^2}}\right)dx$. — Ha $x\to 0$, akkor $f(x)\to 0$; továbbá az $e^{-\frac{a^2}{x^2}}-e^{-\frac{b^2}{x^2}}=$ $=\frac{b^2-a^2}{x^2}+\ldots$ *Taylor*-sor értelmében függvényünk $x\to+\infty$-nél $\frac{1}{x^2}$-ként elenyésző; az integrál tehát *konvergens*.

8. $\int_0^{\infty} x^{\mu}e^{-ax}\,dx$; $\mu,\ a>0$. — Mivel tetszés szerinti $\lambda>1$-gyel $\frac{x^{\mu}e^{-ax}}{1/x^{\lambda}}=\frac{x^{\mu+\lambda}}{e^{ax}}\to 0$, amikor $x\to+\infty$, azért az integrál *konvergens*.

9. $\int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$. — Ha $x\to 0$, akkor $f(x)\to 0$; tetszőleges $\lambda>1$-nél $\frac{f(x)}{1/x^{\lambda}}=x^{\lambda}f(x)=$ $=\frac{1}{\sqrt{e^{2x}x^{-(2\lambda+2)}-x^{-2(2\lambda+2)}}}\to 0$, ha $x\to+\infty$, tehát az integrál *konvergens*.

10. $\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x\sqrt{x^2-1}}$. — Itt $f(x)\to 0$, ha $x\to 1$; $1<\lambda<2$ esetén $x^{\lambda}f(x)=\frac{x^{\lambda}\ln x}{x\sqrt{x^2-1}}=$ $=\frac{\ln x}{x^{2-\lambda}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\to 0$, ha $x\to+\infty$, így az integrál *konvergens*.

11. $\int_0^{\infty} \frac{x \sin ax}{k^2 - x^2}\, dx,\ a > 0.$ — Most $g(x) = \frac{x}{k^2 + x^2}$ monoton csökken és $\to 0$, amikor $x \to +\infty$; továbbá $\int_0^{A} \sin ax \leqq \frac{2}{a}$ korlátos, tehát az integrál *konvergens*.

12. $\int_0^{\infty} e^{\sin x} \frac{\sin 2x}{x^{\lambda}}\, dx,\ \lambda > 0.$ — Esetünkben $g(x) = \frac{1}{x^{\lambda}}$ monoton csökken és $\to 0$, ha $x \to \infty$; továbbá

$$\left| \int_0^{A} e^{\sin x} \cdot 2 \sin x \cos x\, dx \right| = 2 \left| \int_0^{\sin A} te^{t}\, dt \right| < 2e$$

módon korlátos, tehát az integrál *konvergens*.

*13. Igazoljuk, hogy $I = \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\, dx$ *divergens*. — A β_2) szerint:

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{x}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 t}{t + n\pi}\, dt \geqq$$

$$\geqq \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 x\, dx \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty, \qquad \text{q. e. d.}$$

*14. Igazoljuk hogy $I_1 = \int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ és $I_2 = \int_a^{+\infty} f(x) \sin^2 x\, dx$ *egyidejűleg konvergens vagy divergens*, ha $f(x) > 0$ *monoton csökkenő*.

Ha I_1 összetartó, $\sin^2 x \leqq 1$ miatt az I_2 is az. Legyen az I_1 divergens. Akkor a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{a+n\pi}^{a+(n+1)\pi} f(x)\, dx < \pi \sum_{n=0}^{\infty} f(a + n\pi)$$

sor szintén divergens. Az I_2 ugyanakkor:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{a+n\pi}^{a+(n+1)\pi} f(x) \sin^2 x\, dx > \int_{a+n\pi}^{a+(n+1)\pi} \sin^2 x\, dx \sum_{n=0}^{\infty} f[a + (n+1)\pi] =$$

$$= \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} f[a + (n+1)] = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} f(a + n\pi)$$

szintén divergens.

b) Nem korlátos függvények improprius integrálja

α) Nem korlátos függvények határozott integrálja

α_1) Legyen $f(x)$ *függvény* az $[a, b-\eta]$ közön korlátos és integrálható, viszont *nem korlátos* a b-től balra levő $[b-\eta, b]$ tetszőleges közben (ahol $0<\eta<b-a$). A b pontot ez esetben *szinguláris pont*nak nevezzük.

Definíció: *Ha az* $\int_a^{b-\eta} f(x)\,dx$ *integrálnak* $\eta \to 0$*-nál határozott véges határértéke van, akkor ezt az* $f(x)$ *függvény* a*-tól* b*-ig vett (improprius) integráljának nevezzük* és

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\eta\to 0} \int_a^{b-\eta} f(x)\,dx$$

módon jelöljük; továbbá az integrált *létező*nek, *konvergens*nek az $f(x)$ függvényt az $[a, b]$ közön integrálhatónak mondjuk. Ha e határérték *végtelen* vagy egyáltalán *nem létezik*, akkor *divergens* integrálról beszélünk.

Ha nem b*, hanem* a *az* $f(x)$ *szinguláris pontja,* az előző értelemben, *akkor* $f(x)$ *függvény* a*-tól* b*-ig vett integrálja:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\eta'\to 0} \int_{a+\eta'}^b f(x)\,dx,$$

feltéve, hogy e határérték létezik és véges.

Az $[a, b]$ közön lehet véges számú $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n$ szinguláris pont is, amelyeknél $f(x)$ nem korlátos, viszont egyébütt $f(x)$ korlátos és integrálható. *Ha pl. az* a*,* b*,* c *három ilyen szingurális, pont és* $a<c<b$*, akkor az* $f(x)$*-nek* a*-tól* b*-ig vett integrálját így definiálhatjuk:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\eta_1\to 0\\ \cdots\\ \eta_4\to 0}} \left[\int_{a+\eta_1}^{c-\eta_2} f(x)\,dx + \int_{c+\eta_2}^{b-\eta_4} f(x)\,dx \right],$$

ha e határérték létezik és véges; vagy ezt az $a<d<c$ és $c<e<b$ belső pontok segítségével, a négy η_i-nek megfelelően, *négy integrálra bontva:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\eta_1\to 0} \int_{a+\eta_1}^{d} f(x)\,dx + \lim_{\eta_2\to 0} \int_{d}^{c-\eta_2} f(x)\,dx + \int_{c+\eta_3}^{e} f(x)\,dx + \lim_{\eta_4\to 0} \int_{e}^{b-\eta_4} f(x)\,dx.$$

Ha $f(x)$ a teljes $[a, b]$ közön *integrálható közönséges* (nem improprius) *értelemben,* akkor az

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\eta\to 0} \int_a^{b-\eta} f(x)\,dx$$

összefüggés magától értetődő, lévén az integrál változó határainak *folytonos* függvénye.

Végtelen felső (alsó) *határ esetén az integrál*t ugyanúgy definiáljuk, *mint korlátos* $f(x)$ *esetén*, feltéve, hogy e végtelenbe nyúló szakaszon *a szinguláris pontok száma véges.*

α_2) *Ha* $f(x)$ az $[a, b]$ közön értelmezett, $[a, b-\eta]$ közön integrálható, továbbá $a \leqq x < b$ közön *létezik* $F(x)$ *primitív függvénye, akkor az integrálszámítás alaptétele szerint:*

$$\int_a^{b-\eta} f(x)\,dx = F(b-\eta) - F(a) = \Big[F(x)\Big]_a^{b-\eta}.$$

Az $\int_a^b f(x)\,dx$ improprius integrál létezésének kérdése láthatóan egyenértékű a $\lim_{\eta \to 0} F(b-\eta) = F(b)$ véges határérték létezésének kérdésével. *Ha az* $F(b)$ *jelű határérték létezik, akkor fennáll:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \Big[F(x)\Big]_a^b.$$

E formula akkor is érvényes, ha az $[a, b]$ *közben véges számú szinguláris pont van, feltéve, hogy ezek* (és esetleg további véges számú pont) *kivételével* $f(x)$ *mindenütt az* $F(x)$ *deriváltja, és* $F(x)$ *a közön mindenütt* (a kivételes pontokban is) *folytonos. Változó felső határ* és $f(x) = F'(x)$ esetén áll:

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'(x)\,dx,$$

feltéve, hogy $F'(x)$ integrálható, akár improprius értelemben is.

β) Az integrál létezésének feltételei és kritériumai

β_1) A korlátos függvények improprius integráljánál ismertetett *főbb tételek analógonjai* itt a következők: *A végtelen sorokkal* való kapcsolat e ***tétel***ből adódik.

Az $\int_a^b f(x)\,dx$ *(ahol* b *szinguláris pont) integrál létezésének szükséges és elégséges feltétele az, hogy a tetszőleges* $a_n \to b$ *sorozattal képzett*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{a_n}^{b_{n+1}} f(x)\,dx \qquad (a_0 = a,\ a \leqq a_n < b)$$

sor egyazon összeghez tartson; ez egyúttal az improprius integrál értéke.

β_2) *A Bolzano—Cauchy-kritérium alapján* kimondható a következő ***tétel:*** *Az* $\int_a^b f(x)\,dx$ *integrál létezésének szükséges és elégséges feltétele (*b *szinguláris) az, hogy bár-*

mely $\varepsilon > 0$ számhoz található legyen olyan $\delta > 0$ szám, hogy a $0 < \eta < \delta$ és $0 < \eta' < \delta$ egyenlőtlenségnek eleget tevő η és η' számokra *fennálljon* a következő egyenlőtlenség:

$$\left| \int_{b-\eta}^{b-\eta'} f(x)\,dx \right| < \varepsilon.$$

Ebből *következik: Ha létezik az* $\int_a^b |f(x)|\,dx$ *integrál, akkor az* $\int_a^b f(x)\,dx$ *integrál szintén létezik.* Fordítva általában *nem* igaz. Ha az $\int_a^b f(x)\,dx$-szel együtt az $\int_a^b |f(x)|\,dx$ is létezik, *abszolút konvergenciáról,* abszolút integrálhatóságról beszélünk.

β_3) *A Cauchy-próba analógonja: Legyen b-hez elég közeli x-ekre* $f(x) = \dfrac{g(x)}{(b-x)^\lambda}$ $\lambda > 0$ *alakú; ez esetben:*

1. *ha* $\lambda < 1$ és $g(x) \leqq c < +\infty$, *akkor az* $\int_a^b f(x)\,dx$ *konvergens,*

2. *ha* $\lambda \geqq 1$ és $g(x) \geqq c > 0$, *akkor az integrál divergens.*

Részletesebben és *gyakorlatibb alakban: Ha* $x \to b$*-nél az* $f(x)$ *függvény* $0 < \lambda$*-rendűen végtelen* $\left(\text{az } \dfrac{1}{b-x}\text{-hez képest}\right)$, *akkor az* $\int_a^b f(x)\,dx$ *aszerint konvergens vagy diverg ens amint* $\lambda < 1$, illetve $\lambda \geqq 1$.

β_4) Improprius integrálok főértéke. Ha az $[a, b]$ közön c az $f(x)$ *szinguláris pontja,* akkor a definíció szerint:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\eta_1 \to 0 \\ \eta_2 \to 0}} \left[\int_a^{c-\eta_1} f(x)\,dx + \int_{c+\eta_2}^b f(x)\,dx \right].$$

E limesnek *függetlennek kell lennie* η_1 és η_2 *határátmenetétől.* Amennyiben ilyen limes nem létezik, akkor *szokásos* az $\eta_1 = \eta_2 \to 0$ *feltétel mellett képezni a limest. Ha ilyen limes létezik, ezt Cauchy után az improprius integrál főértékének nevezzük, és*

$$\text{V. p.} \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\eta \to 0} \left[\int_a^{c-\eta} f(x)\,dx + \int_{c+\eta}^b f(x)\,dx \right]$$

módon jelöljük (V. p. = valeur principale). Ekkor azt mondjuk, hogy az $\int_a^b f(x)\,dx$ integrál főérték értelemben létezik.

Példák és feladatok

α | **1.** $I_1 = \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = ?$ — Az α_1)-ben adott definíció szerint:

$$I_1 = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{a-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\arcsin \frac{x}{a} \right]_0^{a-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \arcsin \frac{a - \varepsilon}{a} = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

E határérték *véges* lévén, az integrál *konvergens.*

Könnyen belátható, hogy:

$$I_2 = \int_{-a}^{+a} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \pi = 2I_1,$$

minthogy az integrálandó *páros* függvény.

2. $I = \int_2^3 \frac{3x\,dx}{2\sqrt[4]{x^2 - 4}} = ?$ — Az előbbi módon járunk el:

$$I = \frac{3}{4} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{2+\varepsilon}^3 \frac{2x\,dx}{\sqrt[3]{x^2 - 4}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} \left[\sqrt[4]{(x^2 - 4)^3} \right]_2^3 = \sqrt[4]{125},$$

az integrál tehát *konvergens.*

3. $I = \int_0^1 \ln x\,dx = ?$ — Parciális integrálással nyerjük:

$$I = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 \ln x\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[x \ln x - x \right]_\varepsilon^1 = -1,$$

minthogy a *L'Hospital*-szabály szerint:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \ln \varepsilon = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln \varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0} (-\varepsilon) = 0.$$

4. $I = \int_0^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}} = ?$ — Az $x = \operatorname{ch} t$ helyettesítéssel: $I = \int_0^\infty \frac{dt}{\operatorname{ch} t}$. Folytassuk!

5. $\int_0^{2r} \frac{\sqrt{2r}}{\sqrt{x}}\,dx = ?$ **6.** $\int_0^r \frac{r\,dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = ?$ **7.** $\int_0^1 x^2 \ln x\,dx = ?$

*8. $I=\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\lambda}=?$ $(\lambda\neq 0,\ b>a)$. — A definíció szerint:

$$I=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ a+\varepsilon}}\int_{a+\varepsilon}^{b}\frac{dx}{(x-a)^\lambda}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{1-\lambda}\left[(b-a)^{1-\lambda}-\varepsilon^{1-\lambda}\right]=$$

$$=\begin{cases}\infty, & \text{ha } \lambda>1;\ \textit{divergens},\\ \dfrac{(b-a)^{1-\lambda}}{1-\lambda}, & \text{ha } \lambda<1;\ \textit{konvergens}.\end{cases}$$

Ha $\lambda=1$, akkor:

$$I=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ a+\varepsilon}}\int_{a+\varepsilon}^{b}\frac{dx}{x-a}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\ln(b-a)-\ln\varepsilon\right]\to\infty;\ \textit{divergens}.$$

Hasonlóan konvergens vagy divergens az

$$\int_a^b\frac{dx}{(b-x)^\lambda},\qquad (b>a,\ \lambda>0)$$

integrál.

α_2) *A 9—18. feladatokat az integrálszámítás alapképletének alkalmazásával oldjuk meg.*

9. $I=\int_{-1}^{8}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=?$ — Az $f(x)$ szinguláris pontja $x_s=0$; $F(x)=\frac{3}{2}x^{2/3}$ ott *folytonos*, így I *létezik*, és értéke:

$$I=\left[\frac{3}{2}x^{2/3}\right]_{-1}^{8}=\frac{9}{2}.$$

10. $I=\int_0^1\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. — Az $f(x)$ szinguláris pontja a [0, 1] közön $x_s=1$: a primitív függvény $F(x)=\frac{1}{2}(\arcsin x)^2$ itt ($x_s=1$-nél) *folytonos*; így az integrál létezik, *konvergens*, és értéke:

$$I=\frac{1}{2}\left[(\arcsin x)^2\right]_0^1=\frac{\pi^2}{8}.$$

11. $I=\int_{-2}^{+2}\frac{2x\,dx}{x^2-1}=?$ — Az I nem létezik, *divergens*, mert:

$$F(x)=\ln|x^2-1|\to-\infty,\quad \text{ha}\quad x\to\pm 1.$$

12. $I=\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x+1}}=?$ — Ez esetben $x_s=1$, és itt *folytonos* a primitív függvény: $F(x)=-\arcsin\frac{x+1}{2x}$. Ily módon I *létezik*, és értéke:

$$I=\left[\arcsin\frac{x+1}{2x}\right]_2^1=\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{3}{4}.$$

13. $I=\int_1^2 \frac{dx}{x\ln x}=?$ — Ez *nem létezik*, mert $x\to 1$-nél $F(x)=\ln(\ln x)\to-\infty$.

14. $\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx=?$ **15.** $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=?$

16. $\int_0^1 x\ln x\,dx=?$ **17.** $\int_0^{2r} \frac{2\sqrt{2r}}{\sqrt{2r-x}}\,dx=?$

18. $\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}=?$

β **1.** $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^4}}$. — Az integrandus $x\to 1$-nél $\frac{1}{\sqrt[4]{1-x}}$-ként, azaz $\lambda=\frac{1}{4}$-*rendüen* tart a végtelenhez, mert

$$\frac{f(x)}{\frac{1}{(b-x)^\lambda}}=f(x)(b-x)^\lambda=\sqrt[4]{\frac{1-x}{1-x^4}}=\frac{1}{\sqrt[4]{1+x+x^2+x^3}}\to\frac{1}{\sqrt[4]{4}}<\infty,$$

amikor $x\to 1$. Ily módon az integrál *konvergens*.

2. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$, $k^2<1$. — Itt $f(x)$ az $x\to 1$-nél $\lambda=\frac{1}{2}$-*rendüen* $\to\infty$; az integrál tehát *konvergens*.

3. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x(e^x-e^{-x})}}$. — Itt $x_s=0$ és $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2\frac{e^x-e^{-x}}{x}}}\to\frac{1}{x^{2/3}\sqrt[3]{2}}$, ha $x\to 0$; ui. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{x}=\lim_{x\to 0}2\frac{\operatorname{sh}x}{x}=2$. Így $\lambda=\frac{2}{3}<1$ lévén, az integrál *konvergens*.

4. $\int_0^1 \frac{dx}{\ln x}$. — Ez esetben $f(x)(1-x)=\frac{1-x}{\ln x}\to -1$, ha $x\to 1$; így $\lambda=1$ lévén, az integrál *divergens.*

5. $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. — Ha $x\to 1$, akkor $f(x)\to 0$; $x_s=0$. A $0<\lambda<1$ esetén:

$$f(x)x^\lambda=\frac{x^\lambda \ln x}{\sqrt{1-x^2}}\to 0, \quad \text{ha} \quad x\to 0;$$

tehát az integrál *konvergens.*

6. $\int_0^{\pi/2} \ln \sin x\,dx$. — Itt $x_s=0$. Ha $0<\lambda<1$, akkor:

$$f(x):\frac{1}{x^\lambda}=f(x)x^\lambda=x^\lambda \ln \sin x=\left(\frac{x}{\sin x}\right)^\lambda \sin^\lambda x\cdot \ln \sin x\to 0,$$

amikor $x\to 0$. Az integrál tehát *konvegens.*

7. $\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx$. — A szinguláris pontok: ∞ és ($a<1$-nél) 0 is. Integrálunk tehát szétoszthatóan így:

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx=\int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx+\int_1^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx.$$

Az első *összetartó* az $a>0$-nál $\left[f(x) \text{ az } \frac{1}{x^{1-a}}\text{-ként nő } x\to 0\text{-nál}\right]$; a másik is, ha $a<1$ $\left[f(x) \text{ az } \frac{1}{x^{2-a}}\text{-ként elenyésző } x\to\infty\text{-nél}\right]$. Végeredményben integrálunk $0<a<1$ esetén *konvergens.*

8. $I=\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$. — Az $x_s=\infty$ és 0. Integrálunk szétoszthatóan így:

$$I=\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx+\int_1^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx=I_1+I_2.$$

Ha $0<\lambda<1$, akkor $f(x)x^{\lambda}=\dfrac{x^{\lambda}\ln x}{1-x^2}\to 0$, midőn $x\to 0$; azaz I_1 *konvergens.*

Ha $1<\mu<2$, úgy $f(x)x^{\mu}=\dfrac{x^2}{1+x^2}\cdot\dfrac{\ln x}{x^{2-\mu}}\to 0$, amikor $x\to\infty$; vagyis I_2 is *konvergens.*

Végeredményben I *konvergens.*

Vizsgáljuk meg a 9—11. *integrálokat konvergencia szempontjából.*

9. $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{dx}{x+\sin^2 x}$. **10.** $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1}{1+x^2+x^4}\,dx$. **11.** $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{dx}{x+\sqrt{1+x^2}}$.

12. $I=\displaystyle\int_a^b\frac{dx}{x-c}$, $a<c<b$. — Az I mint *improprius integrál nem létezik*, mert az

$$\int_a^{c-\varepsilon}\frac{dx}{x-c}+\int_{c+\varepsilon'}^{b}\frac{dx}{x-c}=\ln\frac{b-c}{c-a}+\ln\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}$$

kifejezésnek nincs határozott értéke, ha ε és ε' egymástól független. Ha viszont az $\varepsilon=\varepsilon'$ követelményt vesszük, akkor az ε-tól független

$$\int_a^{c-\varepsilon}\frac{dx}{x-c}+\int_{c+\varepsilon}^{b}\frac{dx}{x-c}=\ln\frac{b-c}{c-a}$$

kifejezést nyerjük, amit az $\displaystyle\int_a^b\frac{dx}{x-c}$ integrál *főértékének* nevezünk; tehát:

$$\text{V. p.}\int_a^b\frac{dx}{x-c}=\ln\frac{b-c}{c-a}.$$

13. $I=\displaystyle\int_a^b\frac{dx}{(x-c)^n}$, $a<c<b$; $n=2, 3, \ldots$ — Ez esetben:

$$I=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon'\to 0}}\left[\int_a^{c-\varepsilon}\frac{dx}{(x-c)^n}+\int_{c+\varepsilon'}^{b}\frac{dx}{(x-c)^n}\right]=$$

$$=\frac{1}{n-1}\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon'\to 0}}\left[\frac{1}{(a-c)^{n-1}}-\frac{1}{(b-c)^{n-1}}+\frac{1}{\varepsilon'^{n-1}}+(-1)^n\frac{1}{\varepsilon^{n-1}}\right].$$

Ha *n páratlan*, akkor $\varepsilon = \varepsilon'$ esetén az utolsó két, ∞-hez tartó tag kiesik, s nyerjük az $\int_a^b \frac{dx}{(x-c)^n}$ *főértékét.*

Páros n-nél viszont a két utolsó tag miatt $\int_a^b \frac{dx}{(x-c)^n} \to \infty$, így *nincs főérték.*

14: Mutassuk meg, hogy az $I = \int_0^{2a} \frac{dx}{(x-a)^2}$ integrálnak — összhangban az előbbi példa eredményével — *nincs főértéke.*

$$I = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{a-\varepsilon} \frac{dx}{(x-a)^2} + \lim_{\varepsilon' \to 0} \int_{a+\varepsilon'}^{2a} \frac{dx}{(x-a)^2} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\frac{-1}{x-a} \right]_0^{a-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon' \to 0} \left[\frac{-1}{x-a} \right]_{a+\varepsilon'}^{2a} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{a} - \frac{1}{a} + \lim_{\varepsilon' \to 0} \frac{1}{\varepsilon'}.$$

Látható, hogy $I \to \infty$, akár egymástól független ε és ε', akár $\varepsilon = \varepsilon'$ esetén.

15. V. p. $I =$ V. p. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$. — Ez esetben az integrálandónak két *szinguláris* pontja is van: $x_1 = 1$, és $x_2 = 2$. Az integrandust részlettörtekre bontva:

$$I = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} \right) dx = \int_0^1 \frac{dx}{1-x} - \int_1^{\infty} \frac{dx}{x-1} + \int_0^2 \frac{dx}{x-2} + \int_2^{\infty} \frac{dx}{x-2} =$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon^* \to 0 \\ A^* \to \infty}} \left[\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{1-x} - \int_{1+\varepsilon'}^{A} \frac{dx}{x-1} - \int_0^{2-\varepsilon''} \frac{dx}{2-x} + \int_{2+\varepsilon'''}^{A'} \frac{dx}{x-2} \right].$$

Itt *minden tag divergens:*

$$I = \lim_{\varepsilon^* \to 0} \left[\ln \frac{1}{\varepsilon} + \ln 2 - \ln \frac{1}{\varepsilon'} - \ln \frac{1}{\varepsilon''} + \ln \frac{1}{\varepsilon'''} \right] + \lim_{A^* \to \infty} \left[\ln \frac{A-2}{A'-1} \right];$$

azonban mégis *létezik a integrál főértéke*, mert ha $\varepsilon = \varepsilon' = \varepsilon'' = \varepsilon'''$ és $A = A'$, akkor nyilván

$$\text{V. p. } I = \ln 2.$$

Itt felhasználtuk, hogy $\lim_{A \to \infty} \left[\ln \frac{A-2}{A-1} \right] = 0.$

16. V. p. $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x\,dx = \text{V. p.}\left[-\cos x\right]_{-\infty}^{+\infty}$. — Bár sem $\cos(+\infty)$, sem $\cos(-\infty)$ nem értelmezett, az integrálnak mégis létezik *főértéke.*

$$I = \lim_{A^*\to\infty}\left[\cos(-A) - \cos(A')\right] = \lim_{A^*\to\infty}(\cos A - \cos A') = 0,$$

ha $A = A'$.

***17.** V. p. $\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{dx}{x\ln x} = ?$ — Itt a szinguláris hely $x_s = 1$. Így:

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{x\ln x} + \int_{1}^{2} \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{\varepsilon_1\to 0}\int_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon_1} \frac{dx}{x\ln x} + \lim_{\varepsilon_2\to 0}\int_{1+\varepsilon_2}^{2} \frac{dx}{x\ln x}.$$

Mivel az első tagnál $\ln x \leqq 0$ (lévén $x \leqq 1$), így az első integrál értéke (l. A. IV. kt. 1. § *b) α)* 4. formula):

$$I_1 = \lim_{\varepsilon_2\to 0}\left[\ln(-\ln x)\right]_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon_1};$$

a második integrál pedig:

$$I_2 = \lim_{\varepsilon_2\to 0}\left[\ln\ln x\right]_{1+\varepsilon_2}^{2}.$$

Ha $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, akkor az integrál *főértéke:*

$$\text{V. p. } I = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\ln(-\ln x)\right]_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\ln\ln x\right]_{1+\varepsilon}^{2} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\ln\frac{-\ln(1-\varepsilon)}{-\ln(1/2)} + \ln\frac{\ln 2}{\ln(1+\varepsilon)}\right] =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\ln\left[\frac{-\ln(1-\varepsilon)}{\ln 2}\cdot\frac{\ln 2}{\ln(1+\varepsilon)}\right] = \lim_{\varepsilon\to 0}\ln\frac{-\ln(1-\varepsilon)}{\ln(1+\varepsilon)} = \ln 1 = 0;$$

közben felhasználtuk, hogy

$$\frac{-\ln(1-\varepsilon)}{\ln(1+\varepsilon)} = \frac{\ln 1/(1-\varepsilon)}{\ln(1+\varepsilon)} = \frac{\ln(1+\varepsilon+\varepsilon^2+\ldots)}{\ln(1+\varepsilon)} \to 1, \quad \text{ha} \quad \varepsilon\to 0.$$

Műszaki alkalmazás

VÉKONY SZÁRNYMETSZETEK BIRNBAUM-FÉLE SZÁMÍTÁSA*

Ebben szerepel a következő integrál:

$$I_n = \int_0^{\pi} \frac{\cos n\varphi}{\cos \varphi - \cos \varphi_0}\, d\varphi,$$

ahol φ_0 állandó és $0 < \varphi_0 < \pi$. Számítsuk ki ezen integrál értékét!

Az integrál *improprius*, mert cos φ a $\varphi = 0$ és $\varphi = \pi$ között egyszer eléri cos φ_0 értékét, mely esetben a nevező 0. Ezért az integrálást *két részletben* végezzük, először 0-tól $\varphi_0 - \varepsilon$-ig, azután $\varphi_0 + \varepsilon$-tól π-ig, és a 0-tól π-ig vett integrál értéke alatt a *Cauchy*-féle *főértéket* (V. p.) értjük, vagyis:

$$I_n = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_0^{\varphi_0 - \varepsilon} \frac{\cos n\varphi}{\cos \varphi - \cos \varphi_0}\, d\varphi + \int_{\varphi_0 + \varepsilon}^{\pi} \frac{\cos n\varphi}{\cos \varphi - \cos \varphi_0}\, d\varphi \right].$$

Az integrálást először az $n = 0$ *esetre* végezzük el. Ekkor $\cos n\varphi = 1$, írjunk továbbá cos φ_0 helyett a-t. Alkalmazzuk a $t = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$ helyettesítést. (L. az A. IV. kt. 2. § *b) β)*-t!) Ezzel:

$$\int \frac{d\varphi}{\cos \varphi - \cos \varphi_0} = \int \frac{2\,dt}{\left(\frac{1-t^2}{1+t^2} - a\right)(1+t^2)} = \int \frac{2\,dt}{1-t^2-a(1+t^2)} =$$

$$= \int \frac{2\,dt}{t^2(-1-a)+(1-a)} = -\frac{2}{1+a} \int \frac{dt}{t^2 - \frac{1-a}{1+a}} = \frac{2}{1+a} \int \frac{dt}{b^2 - t^2},$$

ahol $b^2 = \frac{1-a}{1+a}$. $\left[\text{E jelölésmód megengedett, mert } \frac{1-a}{1+a} > 0\right]$.

Az integrálandó részlettörtekre való bontásával (l. A. IV. kt. 4. §):

$$\int \frac{d\varphi}{\cos \varphi - \cos \varphi_0} = \frac{2}{1+a} \cdot \frac{1}{2b} \int \left(\frac{1}{b-t} + \frac{1}{b+t}\right) dt = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \left(\ln \frac{b+t}{b-t}\right) + C,$$

lévén

$$\frac{2}{1+a} \cdot \frac{1}{2b} = \frac{1}{1+a} \sqrt{\frac{1+a}{1-a}} = \sqrt{\frac{1+a}{(1+a)^2(1-a)}} = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}.$$

* L. *Grüber—Blahó* i. m.

Továbbá:

$$b=\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}=\sqrt{\frac{1-a^2}{(1+a)^2}}=\sqrt{\frac{\sin^2\varphi_0}{(1+\cos\varphi_0)^2}}=\frac{\sin\varphi_0}{1+\cos\varphi_0}=$$

$$=\frac{2\sin\frac{\varphi_0}{2}\cos\frac{\varphi_0}{2}}{2\cos^2\frac{\varphi_0}{2}}=\frac{\sin\frac{\varphi_0}{2}}{\cos\frac{\varphi_0}{2}};$$

ezáltal:

$$\frac{b+t}{b-t}=\frac{\frac{\sin\frac{\varphi_0}{2}}{\cos\frac{\varphi_0}{2}}+\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi}{2}}}{\frac{\sin\frac{\varphi_0}{2}}{\cos\frac{\varphi_0}{2}}-\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi}{2}}}=\frac{\sin\frac{\varphi_0}{2}\cos\frac{\varphi}{2}+\cos\frac{\varphi_0}{2}\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi_0}{2}\cos\frac{\varphi}{2}-\cos\frac{\varphi_0}{2}\sin\frac{\varphi}{2}}=\frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi_0+\varphi)}{\sin\frac{1}{2}(\varphi_0-\varphi)}.$$

Ennek felhasználásával:

$$\int_0^{\varphi_0-\varepsilon}\frac{d\varphi}{\cos\varphi-\cos\varphi_0}=\frac{1}{\sin\varphi_0}\left[\ln\frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi_0+\varphi)}{\sin\frac{1}{2}(\varphi_0-\varphi)}\right]_0^{\varphi_0-\varepsilon}=$$

$$=\frac{1}{\sin\varphi_0}\left[\ln\sin\left(\varphi_0-\frac{\varepsilon}{2}\right)-\ln\sin\frac{\varepsilon}{2}\right].$$

Hasonlóan — figyelembe véve, hogy a $\pi\geqq\varphi>\varphi_0$ esetben a primitív függvény

$$\frac{1}{\sin\varphi_0}\ln\left[-\frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi_0+\varphi)}{\sin\frac{1}{2}(\varphi_0-\varphi)}\right]=\frac{1}{\sin\varphi_0}\ln\frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_0)}{\sin\frac{1}{2}(\varphi-\varphi_0)}$$

alakú — írhatjuk:

$$\int_{\varphi_0+\varepsilon}^{\pi}\frac{d\varphi}{\cos\varphi-\cos\varphi_0}=\frac{1}{\sin\varphi_0}\left[\ln\sin\frac{\varepsilon}{2}-\ln\sin\left(\varphi_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)\right].$$

Ezekből:

$$I_0=\text{V. p.}\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{\cos\varphi-\cos\varphi_0}=\lim_{\varepsilon\to0}\left[\frac{1}{\sin\varphi_0}\ln\frac{\sin\left(\varphi_0-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin\left(\varphi_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)}\right]=0.$$

Másodszor tekintsük az $n=1$ *esetet!* Ekkor:

$$I_1=\int_0^{\pi}\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi-\cos\varphi_0}\,d\varphi=\int_0^{\pi}\left(1+\frac{\cos\varphi_0}{\cos\varphi-\cos\varphi_0}\right)d\varphi=$$

$$=\Big[\varphi\Big]_0^{\pi}+\cos\varphi_0\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{\cos\varphi-\cos\varphi_0}=\pi+\cos\varphi_0 I_0=\pi.$$

Végül az $n\geqq 1$ *esetben:*

$$I_{n+1}+I_{n-1}=\int_0^{\pi}\frac{\cos(n+1)\varphi+\cos(n-1)\varphi}{\cos\varphi-\cos\varphi_0}\,d\varphi=$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{2\cos\varphi\cos n\varphi}{\cos\varphi-\cos\varphi_0}\,d\varphi=\int_0^{\pi}\left(2\cos n\varphi+\frac{2\cos\varphi_0\cos n\varphi}{\cos\varphi-\cos\varphi_0}\right)d\varphi=$$

$$=\left[\frac{2\sin n\varphi}{n}\right]_0^{\pi}+2\cos\varphi_0\int_0^{\pi}\frac{\cos n\varphi}{\cos\varphi-\cos\varphi_0}\,d\varphi=2\cos\varphi_0 I_n.$$

Itt felhasználtuk a $2\cos nx\cos mx=\cos(n+m)x+\cos(n-m)x$ azonosságot, ahol $m=1$.

Ily módon egy *rekurziós formulát* kaptunk, mely szerint:

$$I_{n+1}=2\cos\varphi_0 I_n-I_{n-1}.$$

Mivel $I_0=0$, és $I_1=\pi$, így:

$$I_2=2\cos\varphi_0\pi=\pi\frac{2\cos\varphi_0\sin\varphi_0}{\sin\varphi_0}=\pi\frac{\sin 2\varphi_0}{\sin\varphi_0}.$$

Hasonlóan:

$$I_3=2\cos\varphi_0\pi\frac{\sin 2\varphi_0}{\sin\varphi_0}-\pi=\pi\left(2\cos\varphi_0\frac{\sin 2\varphi_0}{\sin\varphi_0}-1\right)=$$

$$=\pi\frac{2\sin 2\varphi_0\cos\varphi_0-\sin\varphi_0}{\sin\varphi_0}=\pi\frac{\sin 2\varphi_0\cos\varphi_0-\sin\varphi_0+\sin 2\varphi_0\cos\varphi_0}{\sin\varphi_0}=$$

$$=\pi\frac{\sin 2\varphi_0\cos\varphi_0+\sin\varphi_0(-1+2\cos^2\varphi_0)}{\sin\varphi_0}=\pi\frac{\sin 2\varphi_0\cos\varphi_0+\cos 2\varphi_0\sin\varphi_0}{\sin\varphi_0}=$$

$$=\pi\frac{\sin 3\varphi_0}{\sin\varphi_0}.$$

(A $\sin 2\varphi_0=2\sin\varphi_0\cos\varphi_0$ és $\cos 2\varphi_0+1=2\cos^2\varphi_0$ azonosságok felhasználásával.)
Minden további n-re (teljes indukcióval):

$$I_{n+1}=\pi\frac{2\cos\varphi_0\sin n\varphi_0-\sin(n-1)\varphi_0}{\sin\varphi_0}=$$

$$= \pi \frac{2 \cos \varphi_0 \sin n\varphi_0 - \sin n\varphi_0 \cos \varphi_0 + \cos n\varphi_0 \sin \varphi_0}{\sin \varphi_0} =$$

$$= \pi \frac{\cos \varphi_0 \sin n\varphi_0 + \cos n\varphi_0 \sin \varphi_0}{\sin \varphi_0} = \pi \frac{\sin (n+1)\varphi_0}{\sin \varphi_0}.$$

Végeredményben tehát bármely n-re ($n = 1, 2, 3, \ldots$):

$$\text{V. p.} \int_0^{\pi} \frac{\cos n\varphi}{\cos \varphi - \cos \varphi_0} \, d\varphi = \pi \frac{\sin n\varphi_0}{\sin \varphi_0}.$$

c) Az improprius integrálok sajátságai. Néhány különleges integrál

α) Az improprius és közönséges integrálok néhány közös tulajdonsága

Tekintsük általánosságban az $[a, b]$ véges vagy végtelen intervallumot. *Az improprius integrálok legegyszerűbb tulajdonságai a közönséges* (nem improprius) *integrálokéval azonosak* és ezekből egyforma módszerekkel kaphatók meg. Minthogy az improprimus integrálok közönséges integrálok határértékei, *elegendő általában ez utóbbiakra vonatkozólag felírni azon egyenlőséget vagy egyenlőtlenséget, amely kifejezi a megkívánt tulajdonságot és utána határátmenetre áttérni.*

α_1) Ha $f(x)$ integrálható a $[b, a]$ (irányított) szakaszon, akkor az $[a, b]$ szakaszon is integrálható, és fennáll:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

α_2) Ha $f(x)$ integrálható az $[a, b]$, $[a, c]$ és $[c, b]$ közök legnagyobbikán, akkor a másik kettőn is integrálható és fennáll:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

α_3) Legyen $f(x)$ az $[a, b]$ közön integrálható, és legyen k tetszőleges constans. Akkor $k\,f(x)$ ugyancsak integrálható $[a, b]$-ben, és írható:

$$\int_a^b k\,f(x)\,dx = k \int_a^b f(x)\,dx.$$

α_4) Legyen $f(x)$ és $g(x)$ az $[a, b]$ intervallumban integrálható, akkor $f(x) \pm g(x)$ is integrálható ugyanott, és fennáll:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx.$$

α_5) *Ha $f(x)$ és $g(x)$ az $[a, b]$ közön integrálhatók, azonkívül az egész intervallumban $f(x) \leqq g(x)$, akkor $a < b$ esetben fennáll:*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqq \int_a^b g(x)\,dx.$$

α_6) *Amennyiben az $[a, b]$ intervallumban $|f(x)|$ is integrálható, akkor $a < b$ esetén:*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

α_7) *Ha $f(x)$ az $[a, b]$ intervallumban integrálható, akkor ezen intervallum bármelyik x helyére létezik a*

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

integrál is, és ez x-nek folytonos függvénye.

α_8) *Amennyiben $f(x)$ az $x = x_0$ pontban folytonos, akkor az α_7)-ben szereplő $\Phi(x)$ függvénynek e pontban létezik differenciálhányadosa, és ez:*

$$\Phi'(x_0) = f(x_0).$$

β) Középértéktételek

Az 1. § *e)*-ben tárgyalt *δ)* tétel korlátos $f(x)$ függvényt és véges intervallumot tételez fel, és ezért nem vihető át improprius integrálokra; mások, pl. az *α)* és *β)* általánosíthatók improprius integrálokra is.

β_1) Első középértéktétel. *Legyen $f(x)$ és $g(x)$ mindegyike az $[a, b]$-ben integrálható és ugyanott $f(x)$ korlátos, $m \leqq f(x) \leqq M$ és $g(x)$ ne változtassa előjelét; ez esetben az $f(x)\,g(x)$ függvény is integrálható, és fennáll:*

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)\,dx,$$

ahol $m \leqq \mu \leqq M$. *Ha $f(x)$* az $[a, b]$ zárt intervallumban *folytonos*, akkor:

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(c) \int_a^b g(x)\,dx,$$

ahol $a \leqq c \leqq b$ $[f(c) = \mu]$.

β_2) Második középértéktétel. *Legyen az $[a, b]$ intervallumban $f(x)$ monoton és korlátos és $g(x)$ ott integrálható. Akkor az $f(x)\,g(x)$ függvény is integrálható, és fennáll:*

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(a) \int_a^\xi g(x)\,dx + f(b) \int_\xi^b g(x)\,dx, \quad \text{ahol} \quad a \leqq \xi \leqq b.$$

γ) Parciális integrálás improprius integrálok esetén

Legyen $u(x)$ és $v(x)$ *első deriváltjával együtt folytonos* az $[a, b]$ intervallum minden pontjában, kivéve a b pontot (amely $+\infty$ is lehet). Ebben az esetben *fennáll:*

$$\int_a^b u\,dv = \Big[uv\Big]_a^b - \int_a^b v\,du,$$

ahol a jobb oldal első tagján a

$$\lim_{x\to b} u(x)\,v(x) - u(a)v(a)$$

különbséget értjük.

Feltételezzük, hogy az itt szereplő *három kifejezés közül kettőnek van értelme* (véges határértéke); *ebből a harmadik létezése már következik.*

δ) Helyettesítés improprius integrálok esetén

Legyen $f(x)$ *folytonos* a véges vagy végtelen $[a, b]$ intervallumban, következésképpen *integrálható* is ott minden olyan részintervallumban, mely a b *pont*ot (ez a végtelenben is lehet) nem tartalmazza (a b egyetlen szinguláris pont).

Ha már most $x = \varphi(t)$ *monoton* (növekvő vagy csökkenő) *és* $\varphi'(t)$ *deriváltjával együtt* az $[\alpha, \beta]$ intervallumban *folytonos* (itt $\beta + \infty$ is lehet), továbbá $\varphi(\alpha) = a$ és $\varphi(\beta) = b$ (ez utóbbi oly értelemben, hogy $\lim_{t\to\beta} \varphi(t) = b$), akkor a következő *egyenlőség* áll fenn:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt.$$

Ha ezen integrálok egyike létezik, ebből a másik létezése már következik.

ε) Improprius integrálok meghatározása közelítő összegek segítségével

Ha az $y=f(x)$ függvény az $[a, b]$ intervallumban *nem korlátos*, akkor nyilvánvalóan *nem lehet* az integrál meghatározása céljából *tetszőleges közelítő összegeket képezni. Viszont minden esetben lehet* őket *úgy választani, hogy* ezen összegek az intervallum beosztásának finomítása esetén *az improprius integrál értékéhez tartsanak.* Vizsgáljuk a kérdést a legegyszerűbb esetben, a *monoton* függvények esetében.

Legyen az $f(x)$ *függvény* a $(0, a]$ intervallumban $(a>0)$ *pozitív, monoton csökkenő* és $x\to 0$ esetén $f(x)\to+\infty$.

Osszuk a $(0, a]$ intervallumot n *egyenlő részre;* akkor

$$\int_0^a f(x)\,dx = \sum_{\nu=0}^{n-1} \int_{\frac{\nu}{n}a}^{\frac{\nu+1}{n}a} f(x)\,dx < \int_0^{\frac{a}{n}} f(x)\,dx + \sum_{\nu=1}^{n-1} f\left(\frac{\nu}{n}a\right)\frac{a}{n}$$

(mert az utóbbi felső közelítő összeg), és még inkább:

$$\int_0^a f(x)\,dx < \int_0^{\frac{a}{n}} f(x)\,dx + \sum_{\nu=1}^{n} f\left(\frac{\nu}{n}a\right)\frac{a}{n};$$

Ugyanekkor nyilvánvaló, hogy:

$$\int_0^a f(x)\,dx > \sum_{\nu=1}^{n} f\left(\frac{\nu}{n}a\right)\frac{a}{n}$$

[lévén ez utóbbi $f(x)$ monoton csökkenése miatt nyilván alsó közelítő összeg].

Ezekből:

$$0 < \int_0^a f(x)\,dx - \frac{a}{n}\sum_{\nu=1}^{n} f\left(\frac{\nu}{n}a\right) < \int_0^{\frac{a}{n}} f(x)\,dx.$$

Ez utóbbi integrál azonban $n\to\infty$ esetén 0 felé tart, tehát *végeredményben:*

$$\int_0^a f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{a}{n}\sum_{\nu=1}^{n} f\left(\frac{\nu}{n}a\right).$$

Ha $f(x)$ *monoton növekvő, pozitív* függvény, és $x\to a$ esetben $f(x)\to+\infty$, akkor *hasonló gondolatmenettel* kapjuk:

$$\int_0^a f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{a}{n}\sum_{\nu=0}^{a-1} f\left(\frac{\nu}{n}a\right).$$

Hasonló képletek [$-f(x)$-re alkalmazva] vezethetők le *monoton negatív* függvényekre is.

A végtelen határú integrálok eseteit lásd: Фихтенгольц i. m. II. kt. 457. §.

$\zeta)$ Froullani integrálja Az $\int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx$ $(a>0, b>0)$ típusú integrálokat *Froullani*-féle integráloknak nevezzük.

$\zeta_1)$ Ha az $f(x)$ *nem negatív x értékekre* értelmezett és *folytonos* függvény, továbbá az $f(+\infty) = \lim_{x\to\infty} f(x)$ *határérték létezik és véges, akkor ezekből következik, hogy* $(0<\delta<\Delta<+\infty)$ esetén *létezik az alábbi integrál:*

$$I = \int_\delta^\Delta \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = \int_\delta^\Delta \frac{f(ax)}{x}\,dx - \int_\delta^\Delta \frac{f(bx)}{x}\,dx.$$

Az $ax=z$, illetőleg $bx=z$ helyettesítéssel kapjuk:

$$I = \int_{a\delta}^{a\Delta}\frac{f(z)}{z}\,dz - \int_{b\delta}^{b\Delta}\frac{f(z)}{z}\,dz = \int_{a\delta}^{b\delta}\frac{f(z)}{z}\,dz - \int_{a\Delta}^{b\Delta}\frac{f(z)}{z}\,dz.$$

A keresett integrál tehát a következőképpen határozható meg:

$$\int_0^{\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx=\lim_{\delta\to 0}\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{f(z)}{z}\,dz-\lim_{\Delta\to+\infty}\int_{a\Delta}^{b\Delta}\frac{f(z)}{z}\,dz.$$

Ez utóbbi két integrálra *alkalmazva az általánosított középértéktételt*, ezt kapjuk:

$$\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{f(z)}{z}\,dz=f(\xi)\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{dz}{z}=f(\xi)\ln\frac{b}{a},\qquad (a\delta\leqq\xi\leqq b\delta);$$

továbbá hasonlóan:

$$\int_{a\Delta}^{b\Delta}\frac{f(z)}{z}\,dz=f(\eta)\ln\frac{b}{a},\qquad (a\Delta\leqq\eta\leqq b\Delta).$$

Mivel $\delta\to 0$ esetén $\xi\to 0$, és $\Delta\to\infty$ esetén $\eta\to+\infty$, azért *végeredményben:*

$$\int_0^{\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx=[f(0)-f(+\infty)]\ln\frac{b}{a}.$$

ζ_2) Előfordul, hogy $f(x)$-*nek nincs véges határértéke* $x\to+\infty$ *esetén, azonban létezik az*

$$\int_A^{\infty}\frac{f(z)}{z}\,dz$$

integrál.

Helyettesítsünk az idézett megfontolásban Δ helyett egyszerre $+\infty$-t; akkor:

$$\int_0^{\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx=f(0)\ln\frac{b}{a}.$$

ζ_3) Hasonló a helyzet akkor, ha $f(x)$-*nek az* $x\to 0$ *esetben nincs véges határértéke, de létezik az*

$$\int_0^{A}\frac{f(z)}{z}\,dz,\qquad A<+\infty$$

integrál.

Ekkor:

$$\int_0^{\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx=f(+\infty)\ln\frac{a}{b}.$$

Ezt az előzőkből is megkaphatjuk, $x=\frac{1}{t}$ helyettesítés útján.

A racionális (valódi tört) *függvények végtelen szakaszon való integrálását* lásd pl.: Фихтенгольц I. m. II. kt. 459. §.

Az improprius integrálok (pl. *Kantorovics*-féle) *közelítő számításá*ról pl. az előbb említett mű 461. §-ában olvashatunk.

η) Néhány különleges integrál | Lásd a példákat!

Példák és feladatok

γ | **1.** $\int_0^{\pi/2} \ln \sin x \, dx = \left[x \ln \sin x\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} x \frac{\cos x}{\sin x} \, dx = -\int_0^{\pi/2} \frac{x \, dx}{\operatorname{tg} x},$

tehát parciális integrálás útján az improprius integrál *közönséges integrálba ment át*, ami egyszersmind az eredeti *improprius integrál létezését* (összetartását) is *igazolja.**

2—3. Hasonlóan: $\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} \, dx = \int_0^1 \ln x \cdot d(\operatorname{arc\,tg} x) =$

$$= \left[\ln x \operatorname{arc\,tg} x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x} \, dx = -\int_0^1 \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x} \, dx.$$

Ugyanígy:

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = -\int_0^1 \frac{\arcsin x}{x} \, dx.$$

Az utóbbiak már *közönséges integrálok*, az eredeti improprius integrál tehát *konvergens.**

4. $I_n = \int_0^\infty e^{-t} t^n \, dt = \left[-e^{-t} t^n\right]_0^\infty + n \int_0^\infty e^{-t} t^{n-1} \, dt = n I_{n-1};$

$$I_{n-1} = (n-1) I_{n-2}, \ \ldots, \qquad I_1 = 1 I_0, \qquad I_0 = \int_0^\infty e^{-t} \, dt = \left[e^{-t}\right]_\infty^0 = 1.$$

Így:**

$$I_n = n I_{n-1} = n!$$

5. $\int_0^\infty e^{-ax} x^n \, dx = ?$

* Az integrálás határain *helyettesítési értékkel* nem rendelkező függvényeket ott *határértékükkel* értelmezzük.
** L. a B. VI. kötetben az ún. *Gamma-függvényeket*!

δ 1. $I=\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}=?$ — *Helyettesítve:*

$$x=a\cos^2 t+b\sin^2 t;\quad t_a=0,\quad t_f=\frac{\pi}{2};\quad dx=(b-a)\sin 2t\,dt,$$

az improprius integrál átmegy közönségesbe. Egyszerűsítés után:

$$I=2\int_0^{\pi/2} d_t=\pi.$$

2. $I=\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx=?$ — *Összetartását* már igazoltuk $\int_0^\infty=\int_0^1+\int_1^\infty$ felfogásban (b. β) 8. p.). Az $x=\frac{1}{t}$ *helyettesítéssel* élve $dx=-\frac{dt}{t^2}$, $t_a=1$, $t_f=0$; tehát az $\int_1^\infty$ így alakul:

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx=-\int_1^0 \frac{\ln\frac{1}{t}}{1+\frac{1}{t^2}}\cdot\frac{dt}{t^2}=\int_1^0 \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt=-\int_0^1 \frac{\ln x\,dx}{1+x^2}.$$

Tehát a kérdezett integrál:

$$\int_0^\infty \frac{\ln x\,dx}{1+x^2}=\int_0^1 \frac{\ln x\,dx}{1+x^2}+\int_1^\infty \frac{\ln x\,dx}{1+x^2}=0.$$

3. $I=\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4}=?$ — Integrálunk $x=\frac{1}{t}$ *helyettesítéssel*

$$I=\int_0^\infty \frac{t^2\,dt}{1+t^4}=\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{1+x^4}$$

alakú lesz. Ezt az eredeti alakhoz *hozzáadva*, nyerjük:

$$2I=\int_0^\infty \frac{(1+x^2)\,dx}{1+x^4}=\int_0^\infty \frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx}{x^2+\frac{1}{x^2}}.$$

Itt *újabb* $x-\frac{1}{x}=z$ *helyettesítés*sel ($z_a=-\infty$, $z_f=+\infty$):

$$2I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz}{z^2+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{z}{\sqrt{2}}\right]_{-\infty}^{+\infty}=\frac{\pi}{\sqrt{2}},$$

tehát a (más, bonyolultabb módon is nyerhető)* végeredmény:

$$I=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

4. $I=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}=?$ — A $t=\sqrt{\operatorname{tg} x}$, $x=\operatorname{arc\,tg} t^2$ *helyettesítés*sel ($t_a=0$, $t_f=\infty$):

$$I=2\int_0^{\infty}\frac{dt}{1+t^4}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

5. $\int_{-1}^{1}\frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}=?$ — Az integrálandó függvénynek a $[-1, 1]$ intervallum belsejében $x_s=0$-nál *szinguláris pont*ja van. Ezért:

$$I=\int_{-1}^{1}\frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}=\int_{-1}^{0}\frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx+\int_0^{1}\frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}=2\int_0^{1}\frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$$

(a párosság miatt). Az $x=t^3$ *helyettesítés*sel:

$$I=2\int_0^{1}\frac{3t^6+2}{t^2}\cdot 3t^2\,dt=6\left[\frac{3t^7}{7}+2t\right]_0^{1}=14\frac{4}{7}.$$

*ε 1. $\int_0^{1}\ln x\,dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\ln\frac{1}{n}+\ln\frac{2}{n}+\ldots+\ln\frac{n}{n}\right]=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\frac{n!}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\ln\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\ln\left[\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\right]=\ln\frac{1}{e}=-1.*$$

* Vö. A. IV. kt. 94. o. 11. példa.

2. $$\int_0^{\pi/2} \ln \sin x\, dx = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n} \sum_{k=1}^{n-1} \ln \sin \frac{k\pi}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n} \ln\left(\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{2n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n} \ln\left(\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2}\ln n - (n-1)\ln 2}{n} = \frac{\pi}{2}(0 - \ln 2) = -\frac{\pi}{2}\ln 2.*$$

3. $$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx = \lim_{h\to 0} h \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 kh}{(kh)^2} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 kh}{k^2}.$$

E szumma kiszámításához felhasználjuk:

$$\frac{d}{dh}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 kh}{k^2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2kh}{k} = \frac{\pi}{2} - h.*$$

Ennek integrálja: $\frac{\pi - h}{2} h$. Így végül:

$$I = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{\pi - h}{2} h = \frac{\pi}{2}.$$

*ζ 1. $$I = \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\, dx.$$ — Az $f(x) = e^{-x}$ értelmezett és *folytonos* minden x-re, $f(0) = 1$ és $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ *véges*. Így a megadott *képlet* szerint:

$$I = [f(0) - f(+\infty)] \ln \frac{b}{a} = (1 - 0) \ln \frac{b}{a} = \ln \frac{b}{a}.$$

2. $$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arc\,tg} ax - \operatorname{arc\,tg} bx}{x}\, dx.$$ — Itt $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$ *folytonos*, $f(0) = 0$, $f(+\infty) = \frac{\pi}{2}$ *véges*. Így az előbbi *formulával*:

$$I = \frac{\pi}{2} \ln \frac{a}{b}.$$

3. $$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x}\, dx.$$ — Most $f(x) = \cos x$ *folytonos*, de $f(+\infty)$ *értelmetlen*, viszont ugyanakkor $\int_A^{\infty} \frac{\cos z}{z}\, dz$ nyilván *létezik*.** Ezen esetre megadott formulánk szerint tehát:

$$I = f(0) \ln \frac{b}{a} = \ln \frac{b}{a}.$$

* L. bővebben az A. VIII. kötetben.
** L. Янке—Эмде i. m.; $Ci(x)$-függvény.

η | **1.** $I=\int_0^{\pi/2} \ln \sin x\,dx$. *(Euler.)* — Az integrál *létezését* már vizsgáltuk [b. β) 6. példa]. Az $x=2t$ *helyettesítés*sel:

$$I=2\int_0^{\pi/4} \ln \sin 2t\,dt=2\int_0^{\pi/4} [\ln 2+\ln \sin t+\ln \cos t]\,dt=$$

$$=\frac{\pi}{2}\ln 2+2\int_0^{\pi/4} \ln \sin t\,dt+2\int_0^{\pi/4} \ln \cos t\,dt.$$

Az utóbbi integrál $t=\frac{\pi}{2}-u$ *helyettesítés*sel: $2\int_{\pi/4}^{\pi/2} \ln \sin u\,du$. Tehát e két integrált *összevonva:*

$$I=\frac{\pi}{2}\ln 2+2\int_0^{\pi/2} \ln \sin t\,dt,$$

így:

$$I=-\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

A γ) 1. példa értelmében:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{x}{\operatorname{tg} x}\,dx=-I=+\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

2. $I=\int_0^{\pi} x \ln \sin x\,dx=?$ — Az $x=\pi-t$ *helyettesítés*sel (ekkor $dx=-dt$):

$$I=-\int_{\pi}^{0} (\pi-t)\ln \sin (\pi-t)\,dt.$$

Mivel $\sin(\pi-t)=\sin t$, azért (a határokat megcserélve):

$$I=\int_0^{\pi} \pi \ln \sin t\,dt-\int_0^{\pi} t \ln \sin t\,dt;$$

vagyis:

$$2I=\pi\int_0^{\pi} \ln \sin t\,dt=2\pi\int_0^{\pi/2} \ln \sin t\,dt.$$

Így (felhasználva az előző példa eredményét):

$$I=-\frac{\pi^2}{2}\ln 2.$$

3. $I=\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=?$ — Az $x=\sin t$ *helyettesítéssel* $\int_0^{\pi/2} \ln\sin x\,dx$-re jutunk;

ezzel:

$$I=-\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

4—5. *Parciális integrálással igazoljuk:*

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}(b-a),$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-a^2x^2}-e^{-b^2x^2}}{x^2}\,dx=\sqrt{\pi}(b-a).$$

6. $I=\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\ln\left|1-\frac{1}{x^2}\right|dx=?$ — Az $x=\sin t$ *helyettesítéssel:*

$$I=2\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\ln\operatorname{ctg} t\,dt=\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)\ln\operatorname{ctg} t=$$

$$=\int_0^{\pi/2}\ln\cos t\,dt-\int_0^{\pi/2}\ln\sin t\,dt+\int_0^{\pi/2}\cos 2t\ln\operatorname{ctg} t\,dt=\int_0^{\pi/2}\cos 2t\ln\operatorname{ctg} t\,dt.$$

Parciális integrálással:

$$I=\left[\frac{\sin 2t}{2}\ln\operatorname{ctg} t\right]_0^{\pi/2}+\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\sin 2t\cdot\frac{1}{\operatorname{ctg} t}\cdot\frac{1}{\sin^2 t}\,dt=\int_0^{\pi/2}dt=\frac{\pi}{2}.$$

7.
$$\int_0^\infty \frac{\sin\alpha x}{x}\,dx=\left\{\begin{array}{l}\frac{\pi}{2},\ \text{ha } \alpha>0\\ 0,\ \text{ha } \alpha=0\\ -\frac{\pi}{2},\ \text{ha } \alpha<0\end{array}\right\}=\frac{\pi}{2}\sin\alpha;$$

ezen eredmény alapján állapítsuk meg az

$$\int_0^\infty \frac{\sin dx}{x} \cos \beta x \, dx$$

integrál értékét $\beta \gtreqless \alpha$, de α és $\beta > 0$ esetre.

Integrálunkat *átalakítjuk:*

$$I(\beta) = \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x} \cos \beta x \, dx = \frac{1}{2}\left[\int_0^\infty \frac{\sin (\alpha+\beta)x}{x} dx + \int_0^\infty \frac{\sin (\alpha-\beta)x}{x} dx\right].$$

E kifejezés *értéke* az adott eredmény alapján:

$$I(\beta) = \frac{\pi}{4}[\operatorname{sign}(\alpha+\beta) + \operatorname{sign}(\alpha-\beta)] = \left\{\begin{array}{l} \frac{\pi}{2}, \text{ ha } \beta < \alpha \\ \frac{\pi}{4}, \text{ ha } \beta = \alpha \\ 0, \text{ ha } \beta > \alpha \end{array}\right\}.$$

Ez az ún. *Dirichlet-féle szakadásos faktor.*

**8. Igazoljuk, hogy:

$$I = \int_0^\infty \cos \gamma x \, dx \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt = \left\{\begin{array}{l} \frac{\pi}{2\gamma}, \text{ ha } |\gamma| > 1 \\ \frac{\pi}{4}, \text{ ha } |\gamma| = 1 \\ 0, \text{ ha } |\gamma| < 1 \end{array}\right\}.$$

Parciálisan integrálva, a $\gamma \neq 0$ *esetre:*

$$I = \left[\frac{1}{\gamma} \sin \gamma x \int_0^\infty \frac{\cos t}{t} dt\right]_0^\infty + \frac{1}{\gamma} \int_0^\infty \frac{\sin \gamma x}{x} \cos x \, dx = 0 + \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\pi}{2},$$

ha $|\gamma| > 1$ és $I = 0$, ha $|\gamma| < 1$ (az előző példa szerint).

Ugyanis:

$$\left|\int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt\right| \leqq \left|\int_x^1 \frac{dx}{x}\right| + \left|\int_1^\infty \frac{\cos t}{t} dt\right| = |\ln x| + C,^*$$

továbbá a *L'Hospital*-szabály alkalmazásával kimutatható, hogy:

$$\lim_{x \to 0} \sin \gamma x \cdot \ln x = 0.$$

Ily módon a $\left[\ldots\right]_0^\infty$ kifejezés értéke valóban 0. Ezzel a $\gamma \lesseqgtr 0$ esetet letárgyaltuk.

* L. Янке—Эмде i. m.; $Ci(x)$ függvényt.

Külön vizsgálandó a $\gamma = 0$ *eset.* Tetszőleges $A > 0$ mellett *parciálisan integrálva,* kapjuk:

$$\int_0^A dx \int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\, dt = \left[x \int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\, dt\right]_0^A + \int_0^A \cos x\, dx =$$

$$= A \int_A^\infty \frac{\cos t}{t}\, dt + \sin A = \left[A \frac{\sin t}{t}\right]_A^\infty + A \int_A^\infty \frac{\sin t}{t^2}\, dt + \sin A = A \int_A^\infty \frac{\sin t}{t^2}\, dt.$$

Ez utóbbi értéke a 2. *középértéktétel* szerint:

$$\int_A^{\bar{A}} \frac{\sin t}{t}\, dt, \qquad \bar{A} > A,$$

mely integrál (összetartó lévén) $\to 0$, ha $A \to \infty$.

Így a kérdezett integrál:

$$\int_0^\infty dx \int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\, dt = 0.*$$

d) Valószínűségi változók és eloszlásfüggvényeik

α) Bevezetés

Az improprius integrál (sőt a később tárgyalandó paraméteres és *Stieltjes*-integrál is) *fontos segédeszközként szerepel a valószínűségszámításban* — ebben a számos modern műszaki tudományág számára is nélkülözhetetlen matematikai diszciplínában. Ennek megmutatása céljából előkészítésként röviden ismertetünk néhány alapvető valószínűségszámítási fogalmat.** (E bevezető jellegű és számos további fejezet általánosabb, behatóbb és precízebb tárgyalását lásd sorozatunk C. V. Valószínűségszámítás c. kötetében.)***

β) Néhány alapfogalom

β_1) A valószínűségszámítás olyan (idealizált) tömegjelenségekkel és ismétlődési folyamatokkal foglalkozik, amelyek adatait kicsinyben esetlegesség, véletlenség, nagyban viszont bizonyos szabályszerűségek jellemzik.

Néhány ilyen jelenség, folyamat: a) kocka-, roulettejáték, *b)* nyeremények kisorsolása, *c)* izzólámpák élettartama, *d)* adott pillanatban a gázatomok száma egy térfogatelemben, *e)* dróthuzalok átmérő-, keménység-, szakítószilárdság-vizsgálata, *f)* a számegyenes bizonyos szakaszán vaktában kijelölt pontok eloszlása stb.

β_2) Valószínűségi változónak nevezzük a vizsgált sokaság egyedeinek egy vagy több, látszólag véletlenül, szeszélyesen változó adatát. Jelölések: ζ, η, $\varkappa$ stb.

* További különleges integrálokat l. pl. Фихтенгольц i. m. II. kt. 460. p.
** Főleg Боев i. m. alapján.
*** E tárgykörben magasabb elméleti igényű hazai mű *Rényi:* Valószínűségszámítás

A valószínűségi változók típusai közül csupán a két legfontosabbról teszünk említést, nevezetesen a *szaggatott (diszkrét) és folytonos változók*ról.

A szaggatott (diszkrét) valószínűségi változók csak izolált, különálló (pl. csak egészszámú) *értékeket vehetnek fel*, pl. $\xi = x_1, x_2, \ldots, x_n$, szemben *a folytonosok*kal, amelyek *egy intervallumon belül minden értéket felvehetnek*, pl. $a \leqq \xi \leqq b$.

A valószínűségi változók magatartását *a valószínűség fogalmának segítségével* jellemezzük.

β_3) A valószínűséget — egyszerűsítve — így definiáljuk: *valamely ξ valószínűségi változó T változási tartományának minden mérhető H intervallumához egyértelműen hozzátartozik egy $P(H)$ függvény mint annak valószínűsége, hogy a ξ a H-ba esik.**

Axiomatikus sajátságai:

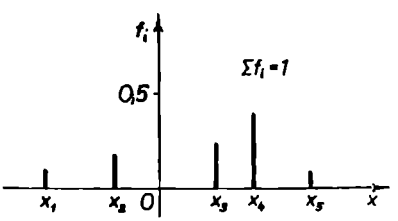
$$0 \leqq P\{H\} \leqq 1, \qquad P\{T\} = 1,$$

$$P\{H_1 + H_2 + \ldots\} = P\{H_1\} + P\{H_2\} + \ldots, \text{ ha } H_i \cap_{(i \neq j)} H_j \neq 0.$$

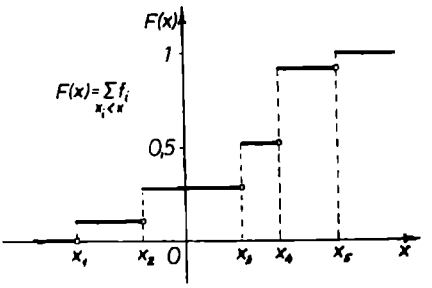
Egy ξ *valószínűségi változó* magatartását éppen azzal jellemezzük, hogy megadjuk, *milyen P valószínűséggel vesz fel, pl. $\xi = x_2$*, illetve $x \leqq \xi < x + dx$, illetve $\xi < x$ *értékeket.*

γ) Eloszlás- és egyéb függvények. Példák

γ_1) Szaggatott (diszkrét) változók jellemzése. Egyik módja: a gyakoriság-, illetve valószínűségfüggvénnyel. *Ekkor a ξ változó x_i értékeihez* ($i = 1, 2, \ldots, k$; illetve $i = 1, 2, \ldots, k, \ldots$) *hozzárendeljük* (pl. táblázattal, képlettel) *ezen értékek fellépésének $f_i = n_i/n$ (viszonylagos) gyakoriságát, illetve $p_i = P\{\xi = x_i\}$valószínűségét.* A függvény *ábrája* fésű alakú különálló ordinátákból áll (243. ábra).



243. ábra



244. ábra

A jellemzés másik módja: az eloszlásfüggvénnyel. *Ezen $F(x)$ függvény megadja, hogy mekkora (viszonylagos) gyakorisággal, illetve valószínűséggel veszi fel a diszkrét ξ változó az x-nél kisebb értékeit:*

$$F(x) = \sum_{x_i < x} f_i = \frac{1}{n} \sum_{x_i < x} n_i, \quad \text{illetve} \quad F(x) = P\{\xi < x\} = \sum_{x_i < x} p_i.$$

A $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$, valamint a $P\{\xi < +\infty\} = 1$ körülményeknek megfelelően:

$$\sum_{i=1}^{k} f_i = 1, \quad \text{illetve} \quad \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$$

Az eloszlásfüggvény *görbéjét* összeggörbének is szokták nevezni (244. ábra). A görbe ugrásai nyilván:

$$F(x_i + 0) - F(x_i) = f_i, \quad \text{illetve} \quad p_i.$$

* A pontosabb és általánosabb halmazelméleti definíciókat lásd C. V. kötetben!

A szaggatott (diszkrét) eloszlás mechanikai analógonja az egyenes menti tömegpontrendszer; az x_i értékekhez rendelt f_i, illetve p_i értékeknek megfelelnek az x_i pontokban elhelyezett m_i tömegek, az $F(x)$ értéknek pedig az x helytől balra levő össztömeg.

Egyik nevezetes szaggatott (diszkrét) eloszlás a Poisson-féle. Valószínűségi függvénye:

$$p_i = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda},$$

ahol $i = 0, 1, 2, \ldots, k, \ldots$ és λ pozitív állandó.

Könnyű igazolni, hogy a fentebb $\sum_{i=0}^{\infty} p_i$-re adott követelmény itt is teljesül:

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i = e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda}\left(1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \ldots + \frac{\lambda^k}{k!} + \ldots\right) = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1.$$

γ_2) Folytonos változók jellemzése. Egyik módja: a (szaggatott eloszlásnál is alkalmazott) eloszlásfüggvénnyel. *Ezen $F(x)$ függvény* ismét *arról tájékoztat, hogy a folytonos ξ változó mekkora valószínűséggel veszi fel $\xi < x$ értékeit* $(-\infty < x < +\infty)$, azaz:

$$F(x) = P\{\xi < x\}.$$

Másik módja: a szaggatott eloszlásnál alkalmazott gyakoriság-, illetve valószínűségfüggvény helyett az

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{dF}{dx} = F'(x) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} P\{x \leqq \xi < x + \Delta x\} = \frac{1}{dx} P\{x \leqq \xi < x + dx\}$$

módon definiált (valószínűség-) sűrűségfüggvényt alkalmazzuk. Ilyenről nyilván csak akkor beszélhetünk, *ha az $F(x)$ eloszlásfüggvény folytonos, sőt* — legfeljebb véges számú pont kivételével — *differenciálható.*

Az $F(x)$ fentebbi értelmezésének megfelelően,

$$\Delta F(x) = F(x + \Delta x) - F(x) = f(x)\Delta x + \varepsilon \Delta x$$

megadja annak valószínűségét, hogy $x \leqq \xi < x + \Delta x$; ha $\Delta x \approx 0$ (igen kicsi), akkor $\Delta F(x) \approx$ $\approx f(x)\Delta x$. Következésképpen a $\frac{\Delta F}{\Delta x}$ az $[x, x + \Delta x]$ szakaszon, az egységnyi szakaszra vonatkoztatott, átlagos valószínűséget, röviden az $[x, x + \Delta x]$ *szakasz menti átlagos valószínűség*et szolgáltatja; az $f(x) \leqq \frac{dF}{dx}$ pedig ugyanezt a $\lim_{\Delta x \to 0} [x, x + \Delta x]$ elenyésző szakaszra vonatkozólag, vagyis az x-beli *lokális valószínűség*et. Az $f(x)$, értelmezéséből kifolyólag, $\geqq 0$.

Az integrálszámítás alapképletének és $F(x)$ definíciójának *felhasználásával* írhatjuk:

$$P\{a \leqq \xi < b\} = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Eszerint — a fentebbi feltételek mellett — *annak valószínűsége, hogy* $a \leqq \xi < b$, *megegyezik az* $f(x)$ *sűrűségfüggvény görbéje alatti terület* $[a, b]$ *szakasz menti részének mérőszámával.*

Az $F(x)$ folytonosságából következik, hogy:

$$F(x+0) - F(x) = P\{\xi = x\} = 0,$$

tehát *egyes x értékek valószínűségéről itt nem beszélhetünk,* szemben a szaggatott eloszlással.

Figyelembe véve továbbá, hogy az $F(x)$ értelmezéséből következőleg

$$F(+\infty) = 1 \quad \text{és} \quad F(-\infty) = 0,$$

írhatjuk:

$$P\{\xi < +\infty\} = F(+\infty) - F(-\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \leqq 1.$$

vagyis *egy valószínűségsűrűség-függvénynek az egész* $(-\infty, +\infty)$ *szakaszon vett integrálja mindig* 1. — Fordítva, *minden olyan* (legfeljebb véges számú szakadással bíró, nemnegatív) $f(x)$ *függvény, amelyre* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$, *valószínűségsűrűség-függvénynek tekinthető.*

Az előbbiek szerint, *annak valószínűsége, hogy* $\xi < x$, így alakul:

$$P\{\xi < x\} = F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(\xi)\,d\xi.$$

A folytonos valószínűségeloszlás mechanikai analógonja az egyenes menti folytonos tömegeloszlás. Az $f(x)$-nek a $\delta(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta x}$ sűrűség, az $F(x)$-nek az $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,dx = M(x)$ bal oldali össztömeg felel meg.

γ_3) Példák a folytonos eloszlásra.

1. Cauchy-féle eloszlás. *Sűrűségfüggvénye:*

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{h}{1 + h^2 x^2}.$$

A függvénynek az $x = 0$ helyen van *maximuma,* míg $|x| \to \infty$ esetén *aszimptotikusan* 0-hoz tart. Az $f(x)$ valóban sűrűségfüggvény, mert folytonos, nemnegatív és

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{h}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + h^2 x^2} = \frac{1}{\pi} \Big[\operatorname{arctg} hx \Big]_{-\infty}^{+\infty} = 1.$$

2. Normális eloszlás. *Sűrűségfüggvénye:*

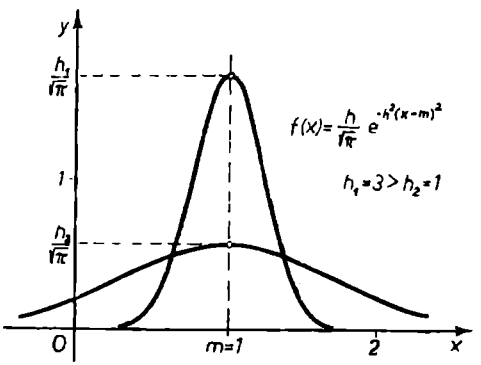
$$f(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(x-m)^2}.$$

Az ilyen eloszlást legelőször *Moivre, Laplace* és *Gauss* vizsgálták. A függvény az $x = m$ helyen *maximális*, az $|x| \to \infty$ esetén *aszimptotikusan* 0-hoz tart (245. ábra). Nagy h értékeknél a *harangszerű görbe* meredek, kis h értékeknél lankás. Az $f(x)$ valóban sűrűségfüggvény, mert folytonos, nemnegatív és:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2(x-m)^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = 1;$$

ui. ez utóbbi, *Poisson-féle integrál* értéke — amint a paraméteres integráloknál többféle megoldásban látható:

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$



245. ábra

A normális eloszlás hatalmas szerepet játszik a valószínűségszámításban és minden alkalmazásában, így *számos modern műszaki tudományágban* is (pl. hírközlésben, a minőségellenőrzésben, a gázelméletben stb.).

3. Az elmozdulás eloszlása harmonikus rezgésnél. Végezzen az M pont a amplitúdójú, ω körfrekvenciájú harmonikus rezgést az O origó körül. *Határozzuk meg a valószínűségsűrűségét* annak, hogy az M pont egy tetszőleges időpontban az O-tól x távolságra van.

Az O-tól mért *elmozdulás* a t időpillanatban:

$$x = a \sin \omega t.$$

Annak *valószínűsége*, hogy az M pont a kérdéses időpontban az $(x, x + dx)$ szakaszon tartózkodik, *egyenesen arányos a szakasz dx hosszával és fordítva arányos a sebességgel.* Ily módon:

$$P\{x \leqq \xi < x + dx\} = C \frac{dx}{\frac{dx}{dt}} = C\,dt,$$

ahonnan a sűrűségfüggvény:

$$f(x) = \frac{1}{dx} P\{x \leqq \xi < x + dx\} = C \frac{dt}{dx} = \frac{C}{\frac{dx}{dt}} = \frac{C}{a\omega \cos \omega t} = \frac{C}{\omega \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 \omega t}} =$$

$$= \frac{C}{\omega \sqrt{a^2 - x^2}}.$$

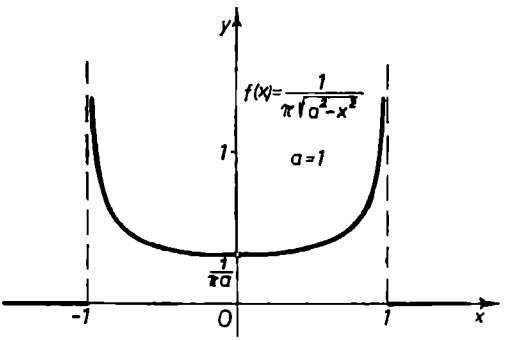
A C-re az

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = 1$$

követelmény alapján a $C=\frac{1}{\pi}$ értéket kapjuk. Tehát *a keresett sűrűségfüggvény:*

$$f(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}.$$

ha $-a<x<+a$; az $|x|>a$ szakaszon viszont $f(x)=0$, mert az M pont az amplitúdónál nagyobb távolságra nem lehet O-tól, tehát ennek mint lehetetlen eseménynek a valószínűsége zérus (246. ábra).



246. ábra

4. A Maxwell-féle sebességeloszlás. Érdekes fizikai és valószínűségszámítási megfontolások alapján *a gázmolekulák sebessége abszolút értékének jellemzésére* a következő függvényt lehet bevezetni:*

$$f(v)=4\pi Cv^2e^{-h^2v^2},$$

ahol $$v=+\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}.$$

Határozzuk meg a C arányossági tényezőt a sűrűségfüggvényeknél szokásos követelmény alapján.

Az $\int_0^\infty f(v)\,dv=1$ követelményből (most $v\geqq 0$) nyerjük:

$$C=\frac{1}{4\pi\int_0^\infty v^2e^{-h^2v^2}\,dv}.$$

Helyettesítéssel, majd parciális integrálással a nevező így alakul ($u=t$, $v'=te^{-t^2}$):

$$4\pi\int_0^\infty v^2e^{-h^2v^2}\,dv=\frac{4\pi}{h^3}\int_0^\infty t^2e^{-t^2}\,dt=\frac{4\pi}{h^3}\left[-\frac{t}{2}e^{-t^2}\right]_0^\infty+\frac{2\pi}{h^3}\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt=\frac{2\pi}{h^3}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\frac{\pi^{3/2}}{h^3}.$$

A keresett C tehát:

$$C=\frac{h^3}{\pi^{3/2}}.$$

Ezzel *a Maxwell-féle sebességeloszlás sűrűségfüggvénye* végleges alakban:

$$f(v)=\frac{4h^3}{\sqrt{\pi}}v^2e^{-h^2v^2}.$$

A h értéke a gáz nyomásával kapcsolatos.

* L. Боев i. m. 108. o.; *Rényi* i. m. 263. o.

Műszaki alkalmazások

1. ELEKTROMOS ÁRAMKÖR KIKAPCSOLÁSI HŐJE

R ohmos ellenállást és L önindukciót tartalmazó áramkörben az *I áramerősség időbeli lefolyása* az áramkör megszakítása után, mint ismeretes:

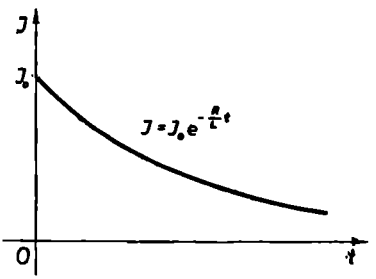
$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t},$$

ahol I_0 az áramerősség a megszakítás ($t = 0$) pillanatában (247. ábra).

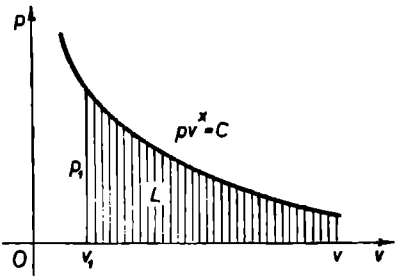
A *kör* megszakítása után keletkező *összes hőmennyiség a* $dQ = I^2R\,dt$ elemi hőmennyiségeknek a $[0, \infty]$ *végtelen* időszakban való *összegezése* útján adódik:

$$Q = \int_0^\infty I^2R\,dt = I_0^2R \int_0^\infty e^{-2\frac{R}{L}t}\,dt = I_0^2R\left[-\frac{L}{2R}e^{-2\frac{R}{L}t}\right]_0^\infty = I_0^2R\left[0 + \frac{L}{2R}\right] = \frac{1}{2}LI_0^2.$$

A kérdezett hőmennyiség láthatóan *megegyezik* az áramkör kezdeti ($t = 0$) elektromos energiájával. Hővé alakulása *gyakorlatilag* véges idő alatt megy végbe.



247. ábra



248. ábra

2. ADIABATIKUS MUNKA

Az *ideális* gáz *adiabatikus állapotváltozás*ának *Poisson*-féle egyenlete:

$$pv^\varkappa = C,$$

ahol p a gáz nyomása, v térfogata, $\varkappa = \frac{c_p}{c_v} > 1$ az állandó nyomású, illetve térfogatú gáz fajhőjének viszonya (248. ábra).

A gáz L munkája teljes adiabatikus expanziónál (vagyis a gáz végtelen térfogatra való kiterjedésével számolva):

$$L = \int_{v_1}^\infty p\,dv = \int_{v_1}^\infty \frac{C}{v^\varkappa}\,dv = -\frac{C}{\varkappa - 1}\left[\frac{1}{v^{\varkappa-1}}\right]_{v_1}^\infty = \frac{C}{\varkappa - 1}\cdot\frac{1}{v_1^{\varkappa-1}}\cdot\frac{v_1}{v_1} = \frac{p_1v_1}{\varkappa - 1}.$$

Gyakorlatilag közel ekkora munkát végez a gáz véges $v_2 \gg v_1$ térfogatra való kiterjedése közben.

3. ELEKTRONELOSZLÁSI FÜGGVÉNY*

Az atom Fermi—Dirac-féle statisztikus elméletében szerepel a következő egyenlőség:

$$\varrho = \frac{4\pi(2m)^{3/2}}{h^3} \int_0^\infty \frac{u^{1/2}}{\frac{1}{A} e^{\frac{u}{kT}} + 1}\, du = -\frac{8\pi(2m)^{3/2}}{3h^3} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{u^{1/2}}{\frac{1}{A} e^{\frac{u}{kT}} + 1}\right) u^{3/2}\, du,$$

ahol u a *kinetikus energia. Igazoljuk* az egyenlőség fennállását!

Bevezetve a

$$C = \frac{4\pi(2m)^{3/2}}{h^3} \qquad \text{és} \qquad f(u) = \frac{1}{\frac{1}{A} e^{\frac{u}{kT}} + 1}$$

jelöléseket és *parciálisan integrálva* az $f(u)\, u^{1/2}$ függvényt, $\varphi = f(u)$, $\psi' = u^{1/2}$ választással, nyerjük $\left(\varphi' = \frac{\partial f(u)}{\partial u}\,,\ \varphi = \frac{2}{3} u^{3/2} \text{ és } f(\infty) = 0 \text{ lévén}\right)$:

$$\varrho = C \int_0^\infty f(u) u^{1/2}\, du = \frac{2}{3} C \left[f(u) u^{3/2} \right]_0^\infty -$$

$$-\frac{2}{3} C \int_0^\infty \frac{\partial f(u)}{\partial u} u^{3/2}\, du = -\frac{2}{3} C \int_0^\infty \frac{\partial f(u)}{\partial u} u^{3/2}\, du.$$

Ezzel a fenti egyenlőséget igazoltuk.

4. Newton-féle potenciál. L. 8. § d., továbbá A IV. kt., 1. § M. a. 2. pld.

5. Végtelen egyenes vezető mágneses tere. L. 8. § d., továbbá A. IV. kt. 5. § M. a. 1. pld.

* L. *Gombás:* Statistische Theorie des Atoms, 12—13. o.; Springer, Wien.

FÜGGELÉK

11. §. PARAMÉTERES INTEGRÁLOK

a) A paraméteres integrál fogalma és főbb tételei

α) A feladat megfogalmazása

Legyen $f(x, y)$ kétváltozós függvény *értelmezve* valamely $[a, b]$ köz minden x értékére [jelöljük e (folytonos) értékhalmazt $X = \{x\}$ módon], továbbá bizonyos előírt y értékekre [jelöljük e (nem feltétlenül folytonos) értékhalmazt $Y = \{y\}$ módon]. Tegyük fel továbbá, hogy az $f(x, y)$ minden Y-beli y-értékre *integrálható* x szerint az $[a, b]$ közön — közönséges vagy improprius értelemben. Akkor az

$$I(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx$$

integrál nyilván *függvénye az* ún. *y paraméternek* vagy segédváltozónak.

A következőkben olyan *kérdések*kel foglalkozunk, mint pl.: van-e $I(y)$-nak határértéke adott határátmenetnél, továbbá $I(y)$ az y-nak folytonos, differenciálható, illetve integrálható függvénye-e és milyen feltételek mellett.

β) Határátmenet, konvergencia

β_1) Egyenletes tartás egy határfüggvényhez. Legyen $f(x, y)$ *értelmezve* az előbbi módon (tehát az x és y értékek $M = X \times Y$ jelű értékhalmazára), legyen továbbá y_0 az y-értékek egy *véges sűrűsödési értéke*. — *Ha a)* $y \to y_0$*-nál létezik egy*

$$\lim_{y \to y_0} f(x, y) = \varphi(x) \qquad (X\text{-beli } x\text{-ekre})$$

véges határfüggvény, és b) ha tetszés szerinti $\varepsilon > 0$*-hoz található olyan* $\delta > 0$*, hogy*

$$|y - y_0| < \delta \text{ esetén } |f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon$$

minden X-beli x-re, akkor azt mondjuk, hogy az $f(x, y)$ *függvény, az X-beli x-ekre egyenletesen tart, konvergál a* $\varphi(x)$ *határfüggvényhez.*

Főbb esetek (y_0 véges): — *Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy* $f(x, y)$ *az* $y \to y_0$*-nál az X-beli x-ekre egyenletesen konvergáljon egy véges határfüggvényhez az, hogy*

tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz rendelhető legyen olyan, x-től független $\delta > 0$, amelynél $|y - y_0| < \delta$ és $|y^* - y_0| < \delta$ (y és y^* Y-beli) esetén minden X-beli x-re fennáll:

$$|f(x, y) - f(x, y^*)| < \varepsilon.$$

— Ha az $f(x, y)$ tetszőleges Y-beli y-nál, x-ben folytonos (integrálható) az $X = [a, b]$ közön és $y \to y_0$-nál egyenletesen tart a $\varphi(x)$ határfüggvényhez, akkor ezen határfüggvény is folytonos (integrálható).

β_2) Két határmenet felcserélése. A kérdés egyszerűbb formában az, hogy *milyen feltételek mellett létezik és egyenlő a*

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x, y) \quad \text{és} \quad \lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y)$$

két határérték, feltéve, hogy létezik a

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$$

kettős határérték.

Tegyük fel, hogy minden X-beli x-re *létezik* a

$$\lim_{y \to y_0} f(x, y) = \varphi(x),$$

és minden Y-beli y-ra a

$$\lim_{x \to x_0} f(x, y) \leqq \psi(x)$$

határérték.

Ha most $y \to y_0$-nál $f(x, y)$ az X-beli x-ekre egyenletesen tart a $\varphi(x)$ határfüggvényhez, akkor a fentebbi két határérték létezik és egyenlő. (Az x_0 és y_0 véges!)

β_3) Határátmenet az integrál jele alatt. Tekintsük ismét az

$$\int_a^b f(x, y)\, dx = I(y)$$

kiindulási integrált. Legyen az $[a, b]$ *köz véges*, és $f(x, y)$ ott *közönséges értelemben integrálható*, és legyen végül y_0 az Y-beli y-ok egy sűrűsödési értéke. Az $I(y)$ *határértéke* felől érdeklődünk, amikor $y \to y_0$.

Tétel: *Ha $f(x, y)$ rögzített y-nál az $[a, b]$ közön x szerint integrálható és $y \to y_0$-nál x-ben egyenletesen tart a $\varphi(x)$ határfüggvényhez, akkor fennáll a következő egyenlőség:*

$$\lim_{y \to y_0} I(y) = \lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b \lim_{y \to y_0} f(x, y)\, dx = \int_a^b \varphi(x)\, dx.$$

Ilyenkor azt mondjuk, hogy *a paraméter szerinti határátmenet elvégezhető az integrál jele alatt.*

Következmény: *Ha $f(x, y)$ rögzített y-nál x-ben folytonos az $[a, b]$ közön és növekvő y-nál folytonos és monoton növekvő határfüggvényhez tart, akkor igaz az előbbi egyenlőség.*

Tétel: Ha $f(x, y)$ az $[a, b; c, d]$ téglánytartományon értelmezett és folytonos kétváltozós függvény, akkor az

$$I(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx$$

integrál az y paraméternek a $[c, d]$ szakaszon folytonos függvénye.

γ) Differenciálás az integrál jele alatt

Tegyük fel, hogy létezik az $f'_y(x, y)$ parciális derivált. *Ha az y szerinti parciális deriválás és az x szerinti integrálás jele*

$$I'(y) = \int_a^b f'_y(x, y)\, dx$$

(*Leibniz—Lagrange* jelölésével), vagy

$$D_y \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b D_y f(x, y)\, dx$$

(*Cauchy* jelölésével) módon *felcserélhető*, akkor azt mondjuk, hogy *a paraméter szerinti deriválás elvégezhető az integrál jele alatt (**Leibniz-szabály**).*

*3. **Tétel:** Legyen $f(x, y)$ értelmezve az $[a, b; c, d]$ téglánytartományban és folytonos minden $[a, b]$-beli x-re tetszés szerinti rögzített $[c, d]$-beli y mellett.* Tegyük fel továbbá, hogy az egész tartományban létezik és mindkét változóban folytonos az $f'_y(x, y)$ parciális derivált. Akkor tetszőleges $[c, d]$-beli y-ra érvényes az előbbi formula.*

δ) Integrálás az integrál jele alatt

Ha fennáll az

$$\int_c^d I(y)\, dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\, dy\right] dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, dy\right] dx$$

egyenlőség, vagy röviden az

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy$$

egyenlőség, akkor azt mondjuk, hogy *az $I(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx$ függvénynek az y paraméter szerinti integrálása az integrál jele alatt végrehajtható.*

* Azaz $|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon$, ha $+\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} < \delta$.

4. Tétel: Ha $f(x, y)$ folytonos mindkét változóban az $[a, b; c, d]$ téglánytartományban, akkor fennáll az előző egyenlőség.

ε) Az integrál határai a paraméter függvényei

Az integrál ilyenkor

$$I(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)\, dy$$

alakú. Vizsgáljuk a paraméter szerinti *folytonosság* és *differenciálhatóság* szempontjából.

5. Tétel: Legyen $f(x, y)$ az $[a, b; c, d]$ téglánytartományban értelmezett s ott folytonos függvény, továbbá legyenek az $x = \alpha(y)$ és $x = \beta(y)$, $c \leqq y \leqq d$ görbék folytonosak, és maradjanak az $[a, b; c, d]$ téglánytartományon belül. E feltételek mellett

$$I(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)\, dy$$

az y-nak a $[c, d]$ közön folytonos függvénye.

6. Tétel: Ha az előbbi $f(x, y)$ függvénynek az $[a, b; c, d]$ téglánytartományban folytonos $f'_y(x, y)$ parciális deriváltja van, továbbá az $\alpha'(y)$ és $\beta'(y)$ deriváltak léteznek, akkor az

$$I(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)\, dy$$

függvény y paraméter szerinti deriváltja is létezik és a következő alakú:

$$I'(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x, y)\, dx + \beta'(y) \cdot f[\beta(y), y] = \alpha'(y) \cdot f[\alpha(y), y].$$

Tulajdonképpen az

$$I(y, u, v) = \int_{a}^{v} f(x, y)\, dx, \qquad [u = \alpha(y) \quad \text{és} \quad v = \beta(y)]$$

összetett függvény y szerinti differenciálásáról van szó, amit *egyszerűbb alakban* így írhatunk:

$$\frac{dI}{dy} = \frac{\partial I}{\partial y} + \frac{\partial I}{\partial u}\alpha'(y) + \frac{\partial I}{\partial v}\beta'(y).$$

ζ) Az integrálandó egyik tényezője csak x függvénye

Az integrál ekkor

$$I(y) = \int_{a}^{b} f(x, y)g(x)\, dx$$

alakú, ahol $g(x)$ az $[a, b]$ közön x-nek *abszolút integrálható* függvénye.

1. Tétel: Az* 1. *tétel feltételei mellett fennáll:*

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x, y)\, g(x)\, dx = \int_a^b \varphi(x)\, g(x)\, dx,$$

ahol $\varphi(x)$ jelentése ugyanaz, mint az 1. tételnél.

Következmény: *Ha egyrészt a* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *sor tagjai az* $[a, b]$ *közön közönséges értelemben integrálható függvények és a sor egyenletesen konvergens, másrészt* $g(x)$ *az* $[a, b]$ *közön abszolút integrálható (akár improprius értelemben), akkor az*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\, g(x)$$

sor tagonként integrálható.

A 2., 3. és 4. tétel analógiájára *kimondhatók* a következő tételek:

2. Tétel: A* 2. *tétel feltételei mellett* az

$$I(y) = \int_a^b f(x, y)\, g(x)\, dx$$

integrál a $[c, d]$ *közön y-nak folytonos függvénye.*

3. Tétel:* A 3. *tétel feltétele mellett az*

$$I(y) = \int_a^b f(x, y)\, g(x)\, dx$$

függvény az y paraméter szerint differenciálható, és fennáll:

$$I'(y) = \int_a^b f'_y(x, y)\, g(x)\, dx.$$

4. Tétel: A* 4. *tétel feltételei mellett igaz:*

$$\int_c^d I(y)\, dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\, g(x)\, dx = \int_a^b g(x)\, dx \int_c^d f(x, y)\, dy.$$

Példák és feladatok

β **1—2.** Az $\int_0^1 \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{y}\, dx$, ill. $\int_0^1 \ln (x^2 + y^2)\, dx$ integrálok az y paraméternek (bármely $y \geqq 0$ értékénél) *folytonos* függvényei. [L. γ) 1—2. példa.]

Végezzük el az alábbi határátmeneteket:

$$\lim_{y\to 1}\int_0^1 \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}\,dx=\int_0^1 \lim_{y\to 1}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}\,dx=\int_0^1 \operatorname{arc\,tg}\,x\,dx=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2;$$

$$\lim_{y\to 0}\int_0^1 \ln(x^2+y^2)\,dx=\int_0^1 \lim_{y\to 0}\ln(x^2+y^2)\,dx=2\int_0^1 \ln x\,dx=-2.$$

A paraméter szerinti *határátmenet az integrál jele alatt* volt végrehajtható, a β_3) 1. tétel értelmében.

3. Mutassuk meg, hogy az

$$\int_0^1 \frac{2xy^2}{(x^2+y^2)}\,dx$$

integrálnál ($y>0$) az $y\to 0$ *határátmenet nem hajtható végre az integrál jele alatt:* ui. nem teljesül a β_3) 1. tételben megkívánt egyenletes konvergencia

$$\int_0^1 \frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx=y^2\int_0^1 \frac{2x\,dx}{(x^2+y^2)^2}=y^2\left[\frac{1}{x^2+y^2}\right]_1^0-\frac{1}{1+y^2}\cdot\lim_{y\to 0}\int_0^1=\lim_{y\to 0}\frac{1}{1+y^2}=1.$$

Ezzel szemben:

$$\int_0^1 \lim_{y\to 0}\frac{2y^2x\,dx}{(x^2+y^2)^2}=0.$$

γ) **1—2.** $I_1(y)=\int_0^1 \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}\,dx=?$; $I_2(y)=\int_0^1 \ln(x^2+y^2)\,dx=?$; $I_1'(y)=?$; $I_2'(y)\lessgtr ?$

A γ) 3. tétel értelmében:

$$I_1'(y)=D_y\int_0^1 \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}\,dx=\int_0^1 D_y\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}\,dx=-\int_0^1 \frac{x\,dx}{x^2+y^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ln(x^2+y^2)\right]_1^0=\frac{1}{2}\ln\frac{y^2}{1+y^2}.$$

Az y-t állandóként kezelve nyerjük:

$$I_1(y)=\int_0^1 \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}\,dx=\left[x\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}\right]_0^1-\frac{y}{2}\int_0^1 \frac{2x\,dx}{x^2+y^2}=$$

$$=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{y}+\frac{y}{2}\left[\ln(x^2+y^2)\right]_1^0=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{y}+\frac{y}{2}\ln\frac{y^2}{1+y^2}.$$

Hasonlóan:

$$I_2'(y)=D_y\int_0^1 \ln(x^2+y^2)\,dx=\int_0^1 D_y \ln(x^2+y^2)\,dx=\int_0^1 \frac{2y}{x^2+y^2}\,dx=2\operatorname{arctg}\frac{1}{y};$$

$$I_2(y)=\int_0^1 \ln(x^2+y^2)\,dx=\ln(1+y^2)-2+2y\operatorname{arctg}\frac{1}{y}.$$

3. $I(r)=\int_0^{\pi} \ln(1-2r\cos x+r^2)\,dx$, $|r|<1$. — A *Leibniz*-szabállyal:

$$I'(r)=\int_0^{\pi}\frac{-2\cos x+2r}{1-2r\cos x+r^2}\,dx.$$

A $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ helyettesítéssel megoldva $I'(r)=0$ adódik. Következésképpen $I(r)=C=$ $=$const. Mivel $I(0)=0$ (lásd az integrált), így $C=0$; tehát a vizsgált $|r|<1$ esetre:

$$I(r)=0.$$

4. Határozzuk meg az $I(a)=\int_0^{\pi/2} \ln(a^2-\sin^2 x)\,dx$ $(a>1)$ integrált az a paraméter szerinti deriváltja (*Leibniz*-szabály) segítségével.

A γ) 3. tétel értelmében *az integráljel alatt deriválhatunk:*

$$I'(a)=\int_0^{\pi/2} D_a[\ln(a^2-\sin^2 x)]\,dx=\int_0^{\pi/2}\frac{2a\,dx}{a^2-\sin^2 x}=\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

Ezt *integrálva a szerint*, nyerjük az $I(a)$ értékét, egy egyelőre *ismeretlen C konstanssal:*

$$I(a)=\pi\operatorname{ar\,ch} a+C=\pi\ln(a+\sqrt{a^2-1})+C.$$

A C meghatározására alakítsuk át és *tegyük egyenlővé* $I(a)$ *új és eredeti alakját:*

$$I(a)=\pi\ln a+\pi\ln\frac{a+\sqrt{a^2-1}}{a}+C=\pi\ln a+\int_0^{\pi/2}\ln\left[1-\frac{1}{a^2}\sin^2 x\right]dx,$$

ahonnan:

$$C=\int_0^{\pi/2}\ln\left[1-\frac{1}{a^2}\sin^2 x\right]dx-\pi\ln\frac{a+\sqrt{a^2-1}}{a}.$$

Az $a \to \infty$ esetben:

$$\left|\ln\left(1-\frac{1}{a^2}\sin^2 x\right)\right| \leqq \left|\ln\left(1-\frac{1}{a^2}\right)\right| \to 0, \quad \text{és} \quad \pi \ln \frac{a+\sqrt{a^2-1}}{a} \leqq \pi \ln 2,$$

tehát $C = -\pi \ln 2$, és *a kérdezett integrál:*

$$I(a) = \pi \ln \frac{a+\sqrt{a^2-1}}{2}.$$

δ | **1.** Legyen $f(x, y) = x^y$ értelmezve az $[0, 1; a, b]$ tartományban, ahol $0 < a < b$.

A δ) 4. tétel feltétele *teljesül*, tehát:

$$\int_a^b dx \int_0^1 x^y\, dx = \int_0^1 dx \int_a^b x^y\, dy.$$

A *bal oldali* integrálásokat elvégezve:

$$\int_0^1 x^y\, dx = \left[\frac{x^{y+1}}{y+1}\right]_0^1 = \frac{1}{y+1};$$

$$\int_a^b \frac{dy}{y+1} = \left[\ln(y+1)\right]_a^b = \ln \frac{b+1}{a+1}.$$

A *jobb oldalon* y szerinti integrálással pedig

$$\int_0^1 x^b\, dy = \left[\frac{x^y}{\ln x}\right]_a^b = \frac{x^b - x^a}{\ln x}$$

adódik, mely még x szerint integrálandó:

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\, dx.$$

Ez *Froullani*-féle integrálra [l. 10. § c) ζ)], az pedig a fentebb nyert eredményre vezet.

2. $f(x, y) = \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$; integrálandó a $[0, 1; 0, 1]$ tartományban.

A δ) 4. tétel feltétele *nem teljesül* a $(0, 0)$ helyen. Ennek megfelelően:

$$\int_0^1 f(x, y)\, dx = \left[\frac{x}{x^2+y^2}\right]_{x=0}^1 = \frac{1}{1+y^2}, \qquad y > 0,$$

továbbá:

$$\int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y)\, dx = \int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = \left[\operatorname{arc\,tg} y\right]_0^1 = \frac{\pi}{4};$$

viszont ugyanakkor:

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)\,dy = \int_0^1 \left[\frac{-y}{x^2+y^2}\right]_{y=0}^1 dx = -\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = -\left[\operatorname{arc\,tg} x\right]_0^1 = -\frac{\pi}{4}.$$

A két eredmény láthatóan *nem* egyezik.

3—4. Mutassuk meg az

$$\int_0^1 dy \int_0^1 \frac{y-x}{(x+y)^3}\,dy$$

és az

$$\int_0^1 dy \int_0^1 \left[\frac{x^5}{y^4} - \frac{2x^3}{y^3}\right] e^{-\frac{x^2}{y}}\,dx$$

integrálokon, hogy *a két integrálás sorrendje nem cserélhető fel!*

$$a)\quad \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{y-x}{(x+y)^3}\,dx = \frac{1}{2},$$

viszont

$$\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{y-x}{(x+y)^3}\,dy = -\frac{1}{2}.$$

$$b)\quad \int_0^1 dy \int_0^1 \left(\frac{x^5}{y^4} - \frac{2x^3}{y^3}\right) e^{-\frac{x^2}{y}}\,dx = -\frac{1}{e},$$

míg

$$\int_0^1 dx \int_0^1 \left(\frac{x^5}{y^4} - \frac{2x^3}{y^3}\right) e^{-\frac{x^2}{y}}\,dy = -\frac{1}{e} + \frac{1}{2}.$$

ζ | **1.** $$\int_0^1 e^x \ln x\,dx = \int_0^1 \ln x \cdot \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right] dx = \int_0^1 \ln x\,dx +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^1 x^n \ln x\,dx = -\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!\,(n+1)}\right].$$

A ζ) 1.* tétel következménye értelmében jártunk el.

2. $$\int_0^1 \frac{e^x-1}{\sqrt{x^3}} = \int_0^1 x^{-\frac{3}{2}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cdot dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^1 x^{n-\frac{3}{2}}\, dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(2 \frac{x^{n-\frac{1}{2}}}{2n-1} \right)_0^1 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!(2n-1)}.$$

Az előbbi példa mintájára dolgoztunk.

3. Határozzuk meg az $I = \int_0^1 \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x\sqrt{1-x^2}}\, dx$ integrált *paraméter bevezetésével.*

Legyen

$$I(y) = \int_0^1 \frac{\operatorname{arc\,tg} xy}{x\sqrt{1-x^2}}\, dx, \qquad y \geqq 0,$$

amikor is $I(1) = I$. Ekkor az integrandus

$$f(x, y)\, g(x) = \frac{\operatorname{arc\,tg} xy}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

alakra hozható. A 3.* tétel szerint ekkor:

$$I'(y) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot D_y \frac{\operatorname{arc\,tg} xy}{x}\, dx = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

Most $x = \cos t$ *helyettesítésse*ı:

$$I'(y) = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1+y^2\cos^2 t} = \left[\frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1+y^2}} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}.$$

Ezt y szerint integrálva, kapjuk a keresett integrált egy ismeretlen állandóval:

$$I(y) = \frac{\pi}{2} \operatorname{ar\,sh} y + C = \frac{\pi}{2} \ln \left(y + \sqrt{1+y^2} \right) + C.$$

Mivel $I(0) = 0$ (lásd behelyettesítéssel), így *az állandó* $C = 0$; tehát integrálunk értéke:

$$I = I(1) = \frac{\pi}{2} \ln \left(1 + \sqrt{2} \right).$$

4. Oldjuk meg az előző feladatot *más módon!*

Felhasználva az

$$\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x} = \int_0^1 \frac{dy}{1+x^2y^2}$$

eredményt, írhatjuk:

$$I=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1+x^2y^2}}.$$

A 4.* tétel alapján az integrált *átrendezhetjük*, így:

$$I=\int_0^1 dy \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}},$$

és a 3. példa szerint:

$$I=\int_0^1 \frac{\pi}{2} \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{\pi}{2} \ln (1+\sqrt{2}).$$

b) Improprius paraméteres integrálok egyenletes konvergenciája

α) Integrálok egyenletes konvergenciájának fogalma

Legyen $f(x, y)$ függvény *értelmezve* $x \geqq a$ értékekre (X halmaz) és bizonyos előírt y értékekre (Y halmaz); továbbá minden Y-beli y-ra *létezzék* az

$$I(y)=\int_a^{\infty} f(x, y)\, dx$$

integrál. Minthogy *a régebbi definíció szerint*

$$\int_a^{\infty} f(x, y)\, dx = \lim_{A \to \infty} \int_a^A f(x, y)\, dx,$$

így az

$$F(A, y)=\int_a^A f(x, y)\, dx$$

integrál az A és y függvénye, amely $y=\text{const.}$ esetében $A \to \infty$-*nél* $I(y)$ *határértékhez tart.*

Ha az $F(A, y)$ az $I(y)$-hoz az Y-beli y-okra egyenletesen konvergál, akkor az $I(y)$ integrált az említett y-okra y-ban egyenletesen konvergensnek nevezzük.

Ez másként azt jelenti, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz található olyan, *y-tól független* $A_0 \geqq a$, amelynél nem kisebb A-kra (azaz $A \geqq A_0$ esetben) fennáll:

$$\left| \int_a^{\infty} f(x, y)\, dx - \int_a^A f(x, y)\, dx \right| = \left| \int_A^{\infty} f(x, y)\, dx \right| < \varepsilon,$$

egyidejűleg bármilyen Y-beli y érték mellett.

β) Az egyenletes konvergencia feltételei. Kapcsolat a sorokkal

β_1) Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy az $I(y) = \int_a^\infty f(x, y)\,dx$ *integrál az Y-beli y-okra egyenletesen konvergáljon az, hogy tetszőleges, adott* $\varepsilon > 0$*-hoz található legyen olyan, y-tól független* A_0 *szám, amelyhez képest* $A' > A \geqq A_0$ *nagyságú számokra fennáll az*

$$\left| \int_a^{A'} f(x, y)\,dx - \int_a^{A} f(x, y)\,dx \right| = \left| \int_A^{A'} f(x, y)\,dx \right| < \varepsilon$$

egyenlőtlenség, egyidejűleg bármilyen Y-beli y esetén is.

β_2) Mint ismeretes, annak szükséges és elégséges feltétele, hogy $A \to \infty$ esetén az

$$F(A, y) = \int_a^A f(x, y)\,dx$$

függvény egyenletesen konvergáljon az $I(y) = \int_a^\infty f(x, y)\,dx$-hez az, hogy ugyanezen $I(y)$-hoz konvergáljon egyenletesen minden $[F(A_n, y)]$ sorozat, bárhogyan is válasszuk magát az A_n sorozatot. Ugyanezt — *a sorok nyelvére lefordítva* — így mondhatjuk: *Az*

$$I(y) = \int_0^\infty f(x, y)\,dx$$

integrál y-ban egyenletes konvergenciája egyenértékű a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x, y)\,dx \qquad (A_0 = a,\ A_n \geqq a)$$

alakú sorok egyenletes konvergenciájával, ahol A_n *tetszőleges változó, amely* $\to \infty$.

γ) Az egyenletes konvergencia elégséges kritériumai

γ_1) Tegyük fel, hogy $f(x, y)$ *integrálható* x-szerint minden véges $[a, A]$ közön $(A \geqq a)$.

Ha létezik olyan, csupán x-től függő $\varphi(x)$ *függvény, amely a végtelen* $[a, +\infty]$ *közön integrálható, s amelyre minden Y-beli y*-értéknél igaz, hogy

$$f(x, y) \leqq \varphi(x), \qquad y \geqq a,$$

akkor az $I(y) = \int_a^\infty f(x, y)\,dx$ *integrál az Y-beli y-értékekre egyenletesen konvergens.*

Szokás ilyenkor azt mondani, hogy *az $f(x, y)$-nak integrálható $\varphi(x)$ majoránsa van;* vagy másként, hogy *az* $I(y) = \int_a^\infty f(x, y)\,dx$ *integrált majorálja* a konvergens és az y paramétert nem tartalmazó $\int_a^\infty \varphi(x)\,dx$ *integrál!*

γ_2) Vizsgáljuk az $I(y) = \int_a^\infty f(x, y)\,g(x, y)\,dx$ integrált, ahol $f(x, y)$ az x szerint *integrálható* tetszőleges $[a, A]$ közön és $g(x, y)$ az x-ben *monoton.*

Ha az $\int_a^A f(x, y)\,dx$ *integrál egyenletesen korlátos, mint A és y függvénye, azaz* $\left|\int_a^A f(x, y)\,dx\right| \leqq K$, ahol $K = \text{const.}$, $A \geqq a$, az y-ok az Y-ből valók, *továbbá $g(x, y)$ az Y-beli y-okra egyenletesen $\to 0$ az $x \to \infty$ esetén, akkor az* $I(y) = \int_a^\infty f(x, y)\,g(x, y)\,dx$ *az Y-beli y-okra egyenletesen konvergens.*

γ_3) *Ha az* $\int_a^A f(x, y)\,dx$ *integrál egyenletesen konvergens az Y halmazbeli y-okra, továbbá az x-ben monoton $g(x, y)$ függvény egyenletesen korlátos, azaz*

$$|g(x, y)| \leqq L, \text{ ahol } L = \text{const.}, \; x \geqq a, \text{ az } y\text{-ok az } Y\text{-ból valók,}$$

akkor az

$$I(y) = \int_a^\infty f(x, y)\,g(x, y)\,dy$$

integrál az Y-beli y-okra egyenletesen konvergens.

γ_4) A γ_3) speciális esete. — *Ha az* $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *konvergens, az x-ben monoton $g(x, y)$ pedig egyenletesen korlátos, akkor az*

$$\int_a^\infty f(x)\,g(x, y)\,dx$$

integrál y-ban egyenletesen konvergens.

δ) Az egyenletes konvergencia másik esete

Tekintsük az $f(x, y)$ függvényt, amely *értelmezve* van a *véges* $[a, b]$ közbeli x értékekre (X halmaz) és bizonyos y értékekre (Y halmaz). Tegyük fel továbbá, hogy $f(x, y)$ az $y = \text{const}$-nál x szerint (közönséges vagy improprius értelemben) *integrálható* a-tól b-ig. Akkor *az*

$$I(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx$$

integrál — legyen bár közönséges vagy improprius — *a*

$$\varphi(\eta, y) = \int_a^{b-\eta} f(x, y)\, dx$$

integrál határfüggvényének tekinthető, amikor $\eta \to 0$.

Ha ezen integrál $\eta \to 0$*-nál az Y-beli y-okra y-ban egyenletesen tart az* $I(y)$ *határfüggvényhez akkor azt mondjuk, hogy az*

$$I(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx$$

integrál az Y-beli y-okra egyenletesen konvergens.

Ez azt jelenti, hogy adott $\varepsilon > 0$-hoz található olyan, *y-tól független* $\delta > 0$, amelyhez képest $\delta \geqq \eta$ értékekre fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$\left| \int_a^b f(x, y)\, dx - \int_a^{b-\eta} f(x, y)\, dx \right| = \left| \int_{b-\eta}^b f(x, y)\, dx \right| < \varepsilon,$$

egyidejűleg bármilyen Y-beli y-ra.

Ezek után az

$$I(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx$$

integrál egyenletes összetartásának szükséges és elégséges feltétele: *tetszőlegesen előírt* $\varepsilon > 0$ *számhoz található legyen olyan, y-tól független* $\delta > 0$ *szám, hogy a* $\delta \geqq \eta > \eta' > 0$ *értékekre fennálljon, bármilyen Y-beli y-ra, a következő egyenlőtlenség:*

$$\left| \int_{b-\eta}^{b-\eta'} f(x, y)\, dx \right| < \varepsilon.$$

Itt is megemlítjük, hogy az

$$I(y) = \int_a^b f(x, y)$$

integrál egyenletes konvergenciája egyenértékű a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x, y)\, dx \qquad (A_0 = a,\ a \leqq A_n \leqq b)$$

végtelen sor egyenletes konvergenciájával.

Lehetséges, hogy nem a b felső, hanem az *a alsó határ* az integrálandó szinguláris pontja. (Akármelyik a végtelenben is lehet.) Akkor *értelemszerűen* az előbbieket mondhatjuk az

$$\int_{a+\eta}^{b} f(x, y)\, dx$$

integrálról. Szükség esetén meg kell mondani, hogy az $x = a, b, +\infty$ stb. *helyek melyikére* vonatkozóan beszélünk az Y-beli y-okra egyenletes konvergenciáról.

Példák és feladatok

α | **1.** Igazoljuk, hogy az $\int_1^{\infty} \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}\, dx$ integrál az y-ban (minden értékénél) *egyenletesen összetartó.*

Az α)-ban mondottak szerint:

$$\left| \int_A^{\infty} \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}\, dx \right| = \frac{1}{A^2 + y^2} \leqq \frac{1}{A} \to 0, \quad \text{ha} \quad A \to \infty.$$

2. Igazoljuk, hogy az $\int_1^{\infty} \frac{n}{x^3} e^{-\frac{n}{2x^2}}\, dx$ az $n = 1, 2, \ldots$ értékekben *nem egyenletesen konvergens.*

Rögzített A-nál ugyanis:

$$\int_A^{\infty} \frac{n}{x^3} e^{-\frac{n}{2x^2}}\, dx = \left[e^{-\frac{n}{2x^2}} \right]_A^{\infty} = 1 - e^{-\frac{n}{2A^2}} \to 1 \neq 0,$$

amikor $n \to \infty$, s így az α)-ban tanultak értelmében integrálunk n-ben *nem* egyenletesen konvergens.

3. Mutassuk meg, hogy az $\int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx$ integrál *α-ban egyenletesen konvergens,* ha $\alpha \geqq \alpha_0 > 0$, de *nem egyenletesen,* ha $\alpha \geqq 0$.

Ha A_0 olyan szám hogy minden $A \geqq A_0$-ra

$$\left| \int_A^\infty \frac{\sin z}{z}\, dz \right| < \varepsilon, \quad \text{ahol} \quad \varepsilon > 0 \text{ előírt szám, akkor}$$

$$\left| \int_A^\infty \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx \right| = \left| \int_{A\alpha}^\infty \frac{\sin z}{z}\, dz \right| < \varepsilon$$

minden $\alpha \geqq \alpha_0 > 0$-ra, melyre $A\alpha \geqq A\alpha_0 \geqq A_0$.

Viszont rögzített A-nál: $\int_{A\alpha}^\infty \frac{\sin z}{z}\, dz \to \frac{\pi}{2} \neq 0$, ha $\alpha \to 0$. (Kiszámítását l. a *c) δ)* 2. példában.)

4. Igazoljuk, hogy $I = \int_0^\infty \frac{\sin ax}{x} \cos x\, dx$ *egyenletesen konvergens* a minden olyan szakaszában, mely a ± 1-et nem tartalmazza!

Átalakítás:

$$I = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\sin (a+1)x + \sin (a-1)x}{x}\, dx;$$

ez — láthatóan — két, az előbb tárgyalt típusú integrál összege.

γ—δ | 1. Igazoljuk *majoráns módszerrel*, hogy az

$$\int_0^\infty e^{-tx^2}\, dx \quad \text{és} \quad \int_0^\infty e^{-tx} x^a \cos x\, dx, \qquad a \geqq 0$$

integrálok egyenletesen összetartók $t \geqq t_0 > 0$-ra!

Az elsőnél $e^{-t_0 x}$ majoránssal, a másodiknál $e^{-t_0 x}\, x^a$ majoránssal dolgozzunk! L. a γ_1)-et!

2. Igazoljuk, hogy $\int_0^1 x^{p-1}\, dx$ *egyenletesen konvergens* p-ben ($x = 0$-nál), ha $p \geqq p_0 > 0$; *nem egyenletesen*, ha $p > 0$.

Az $x^{p_0 - 1}$ *majoránssal* [$p \geqq p_0 > 0$ és $0 \leqq x \leqq 1$ lévén]:

$$\left| \int_0^\eta x^{p-1}\, dx \right| \leqq \int_0^\eta x^{p_0 - 1}\, dx = \left[\frac{x^{p_0}}{p_0} \right]_0^\eta = \frac{\eta^p}{p_0} \to 0,$$

ha $\eta \to 0$.

Viszont rögzített η-nál:

$$\int_0^\eta x^{p-1}\,dx = \frac{\eta^p}{p} \to \infty, \qquad \text{ha } p \to 0.$$

A δ)-ban tanult követelmény tehát csak a $p \geqq p_0 > 0$ esetben teljesíthető!

3. Hasonlóan bizonyítsuk az $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$ integrál *egyenletes konvergenciáját* p-ben, ha $p \geqq p_0 > 0$ ($x = 0$-nál) és q-ban, ha $q \geqq q_0 > 0$ ($x = 1$-nél)! [L. a δ)-t!]

4. Mutassuk meg, hogy az $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^y}\,dx$ integrál konvergenciája *egyenletes* ($x = 0$-nál) y-ban, ha $y \leqq y_0 < 2$, viszont *nem egyenletes* $y < 2$ esetén!

Vizsgáljuk, teljesül-e a δ)-ban adott $\left|\int_0^\eta f(x, y)\,dx\right| < \varepsilon$, ha $\eta \leqq \delta$ követelmény. Az $\frac{1}{x^{y_0-1}}$ *majoránssal* ($y \leqq y_0 < 2$ esetére):

$$\left|\int_0^\eta \frac{\sin x}{x^y}\,dx\right| \leqq \int_0^\eta \frac{dx}{x^{y_0-1}} = \left[\frac{x^{2-y_0}}{2-y_0}\right]_0^\eta = \frac{\eta^{2-y_0}}{2-y_0} \to 0, \quad \text{ha} \quad \eta \to 0.$$

Viszont (az $y < 2$ esetben) η (> 0)-t úgy rögzítve, hogy minden $x \leqq \eta$-re $\frac{\sin x}{x} \geqq \frac{1}{2}$ legyen, nyerjük:

$$\int_0^\eta \frac{\sin x}{x^y}\,dx > \frac{1}{2}\int_0^\eta \frac{dx}{x^{y-1}} = \frac{\eta^{2-y}}{2(2-y)} \to \infty, \quad \text{ha} \quad y \to 2.$$

5. $\int_0^\infty \frac{x \sin \beta x}{\beta^2 + x^2}\,dx$, $\beta > 0$; az integrál β-ban *egyenletesen konvergens*, ha $\beta \geqq \beta_0 > 0$.

Az integrandus $f(x, \beta)\,g(x, \beta) = \sin \beta x \frac{x}{\beta^2 + x^2}$ alakú és

$$\left|\int_0^A f(x, \beta)\,dx\right| = \left|\int_0^A \sin \beta x\,dx\right| = \frac{1 - \cos A\beta}{\beta} \leqq \frac{2}{\beta_0}$$

módon *egyenletesen korlátos* (bármilyen $\beta \geqq \beta_0 > 0$-nál és $A > 0$-nál); továbbá

$$g(x, \beta) = \frac{x}{\beta^2 + x^2} \to 0, \quad \text{ha} \quad x \to +\infty$$

szintén *egyenletesen korlátos* (bármilyen β-nál). Így a γ_2) tétel szerint integrálunk β-ban egyenletesen összetartó, hacsak $\beta \geqq \beta_0 > 0$.

6. Igazoljuk, hogy $\int_a^\infty e^{-xy} f(x)\,dx$ és $\int_a^\infty e^{-x^2 y} f(x)\,dx$ $(a \geqq 0,\ y \geqq 0)$ integrálok *egyenletesen konvergensek*, ha $\int_0^\infty f(x)\,dx$ konvergens.

Itt $g(x, y) = e^{-xy}$ és $e^{-x^2 y}$ x-ben *monoton csökkenő* és *egyenletesen korlátos* (pl. < 1) az $y \geqq 0$, $x \geqq a$ esetben; így a γ_4) szerint az adott integrálok egyenletesen konvergensek.

7. Igazoljuk, hogy az $\int_0^1 \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}\,dx$ integrál összetartása *nem egyenletes* ($x = 0$-nál) y-ban, ennek $[0, 1]$ szakaszán.

Tetszőleges $\eta = \text{const}$ mellett

$$\int_0^\eta \frac{(y^2 - x^2)\,dx}{(x^2 + y^2)^2} = \left[\frac{x}{x^2 + y^2}\right]_0^\eta = \frac{\eta}{\eta^2 + y^2} \to \frac{1}{\eta}, \quad \text{ha} \quad y \to 0.$$

Az δ)-ban adott követelmény tehát $y \to 0$ esetén nem teljesül.

c) Integrálok egyenletes konvergenciájának felhasználása

α) Határátmenet az integrál jele alatt

Itt e kérdéssel a *végtelen szakasz*ra vonatkozó integrálok kapcsán kívánunk foglalkozni.

1. Tétel: *Legyen $f(x, y)$ függvény az említett Y-beli y-okra az $[a, A]$ közön x szerint integrálható (közönséges értelemben, tetszőleges $A > a$ mellett); továbbá $f(x, y)$ minden ilyen közön $y \to y_0$ esetén x-ben egyenletesen tartson a $\varphi(x)$ határfüggvényhez. Ha ezenkívül még az*

$$I(y) = \int_a^\infty f(x, y)\,dx$$

integrál az Y-beli y-okra egyenletesen konvergens, akkor fennáll:

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^\infty f(x, y) = \int_a^\infty \varphi(x)\,dx.$$

Következmény. *Legyen $f(x, y)$ nemnegatív és x-ben folytonos az $[a, +\infty]$ szakaszon és tartson növekvő y-okra növekvő módon a $\varphi(x)$ határfüggvényhez, mely szintén folytonos az*

említett szakaszon. Akkor az $\int_a^\infty \varphi(x)\,dx$ *létezéséből már következik az*

$$I(y) = \int_0^\infty f(x, y)\,dx$$

integrál létezése, minden Y-beli y-ra, valamint a

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^\infty f(x, y)\,dx = \int_a^\infty \varphi(x)\,dx$$

formula érvényessége.

Az a) ζ)-ban említett **1.*** tétel így fogalmazható át:

1'. Tétel. *Legyen $f(x, y)$ az Y-beli y-okra integrálható (közönséges értelemben) az $[a, b-\eta]$ közön, ahol $b-a>\eta>0$; továbbá $f(x, y)$ minden ilyen közön $y \to y_0$ esetén x-ben egyenletesen tartson $\varphi(x)$ határfüggvényhez. Ha még ezenkívül az* $\int_a^b f(x, y)\,dx$ *integrál ($x=b$-nul) az Y-beli y-okra egyenletesen konvergens, akkor fennáll:*

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x, y)\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Az 1.*-nál említett ***következmény*** pedig így alakul: *Tegyük fel, hogy a* $\sum_{n=1}^\infty u_n(x)$ *sor tagjai az $x \geqq a$ (vagy az $a \leqq x < b$) esetben pozitív folytonos függvények és ezen x-ekre folytonos $\varphi(x)$ összeggel rendelkezik. Ha ez utóbbi az $[a, +\infty]$ (vagy az $[a, b]$) közön integrálható, akkor e közön a sor tagonként integrálható.*

β) Integrálok paraméter szerinti folytonossága és differenciálhatósága

Az a) β)- és γ)-ban ismertetett 2. és 3. tételt fogalmazzuk át *végtelen szakasz* esetére.

2. Tétel: *Legyen $f(x, y)$ az $x \geqq a$ értékekre és a $[c, d]$ közbeli y értékekre értelmezett folytonos kétváltozós függvény. Ha az*

$$I(y) = \int_a^\infty f(x, y)\,dx$$

integrál a $[c, d]$ közbeli y-okra egyenletesen konvergens, akkor e közön $I(y)$ az y paraméter folytonos függvénye.

Megjegyzés. *Ha $I(y)$ folytonos y-ban és $f(x, y) \geqq 0$ nemnegatív, akkor $I(y)$ az y-ban egyenletesen konvergens.*

3. Tétel. Legyen $f(x, y)$ az $x \geqq a$-kra, valamint a $[c, d]$-beli y-okra értelmezett folytonos függvény és legyen ugyanezen értékekre $f'_y(x, y)$ deriváltja szintén folytonos. Tegyük fel továbbá, hogy az $\int_a^\infty f(x, y)\,dx$ integrál létezik minden $[c, d]$-beli y-ra, az $\int_a^\infty f'_y(x, y)\,dx$ integrál pedig nemcsak létezik, hanem a $[c, d]$-beli y-okra egyenletesen konvergens. Akkor a $[c, d]$ köz tetszőleges y-jára fennáll:

$$I'(y) = \int_a^\infty f'_y(x, y)\,dx.$$

γ) Integrálok paraméter szerinti integrálhatósága

4. Tétel. A 2. tétel feltételei mellett fennáll a következő formula:

$$\int_c^d I(y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^\infty f(x, y)\,dx = \int_a^\infty dx \int_c^d f(x, y)\,dy.$$

***Következmény.** Ha $f(x, y)$ nemnegatív függvény, már az $I(y) = \int_a^\infty f(x, y)\,dx$ integrál y-beli folytonosságából következik az előbbi formula.*

5. Tétel. Legyen $f(x, y)$ az $x \geqq a$ és $y \geqq c$ értékekre értelmezett folytonos függvény. Tegyük fel továbbá, hogy az

$$\int_a^\infty f(x, y)\,dx \quad \text{és} \quad \int_c^\infty f(x, y)\,dy$$

két integrál egyenletesen konvergens: az első y-ban, a második x-ben, ezek tetszőleges véges szakaszán. Ha most az

$$\int_c^\infty dy \int_a^\infty |f(x, y)|\,dx, \qquad \int_a^\infty dx \int_c^\infty |f(x, y)|\,dy$$

kétszeres integrálok közül legalább az egyik létezik, akkor szintén léteznek és egyenlők az alábbi kétszeres integrálok:

$$\int_c^\infty dy \int_a^\infty f(x, y)\,dx = \int_a^\infty dx \int_c^\infty f(x, y)\,dy.$$

***Következmény.** Tegyük fel, hogy egy nemnegatív folytonos $f(x, y)$ függvény*

$$\int_a^\infty f(x, y)\,dx \quad \text{és} \quad \int_c^\infty f(x, y)\,dy$$

integráljai szintén folytonos függvények: az első y-ban, a második x-ben. Ha most az

$$\int_c^{\infty} dy \int_a^{\infty} {}^3(x, y)\, dx \quad \text{és} \quad \int_a^{\infty} dx \int_c^{\infty} f(x, y)\, dy$$

kétszeres integrálok közül valamelyik létezik, akkor a másik is létezik és egyenlők egymással.

δ) **Nevezetes integrálok** | L. a példákat!

Példák és feladatok

α | **1.** $I = \int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\, dx$; kiszámítandó *az integrandus Taylor-sora segítségével.*

E sor:

$$\frac{\ln(1-x)}{x} = -\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \dots\right).$$

Az $x = 1$ hely környezetében az egyenletes összetartás megszűnik, ez tehát a sor összegének szinguláris pontja; ennek ellenére az összeg a [0, 1] szakaszon integrálható. Az 1′. tétel következménye szerint a sor ezért *tagonként integrálható:*

$$I = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^1 x^{n-1}\, dx = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{6}.$$

2. $I = \int_0^{\infty} \frac{(1 - r\cos\beta x)\, dx}{(1+x^2)(1 - 2r\cos\beta x + r^2)}$, $|r| < 1$; meghatározandó az

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos k x}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} e^{-k} \qquad (k > 0)$$

felhasználásával.

Az

$$\frac{1 - r\cos\beta x}{1 - 2r\cos\beta x + r^2} = \sum_{\nu=0}^{\infty} r^{\nu} \cos \nu\beta x$$

sort* $\frac{1}{1+x^2}$-nel szorozva, x-ben *egyenletesen konvergens* lesz bármely végtelen szakaszon,

* L. pl. Фихтенгольц i. m. II. kt. 412. p.

részletösszegei $\frac{\alpha}{1+x^2}$ alakú *majoráns*sal rendelkeznek, tehát a *tagonkénti integrálhatóság* teljesül:

$$I=\sum_{\nu=0}^{\infty} r^{\nu}\int_0^{\infty}\frac{\cos \nu\beta x}{1+x^2}\,dx=\sum_{\nu=0}^{\infty} r^{\nu}\frac{\pi}{2}e^{-\nu\beta}=\frac{\pi}{2}\sum_{\nu=0}^{\infty}(re^{-\beta})^{\nu}.$$

E *geometriai sor összege*:

$$I=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{1-re^{-\beta}}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{e^{\beta}}{e^{\beta}-r}.$$

3. Az $I=\int_0^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^n}=\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$ eredményt felhasználva, igazoljuk:

$$K=\int_0^{\infty}e^{-z^2}dz=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Az I-ben $x=\frac{z}{\sqrt{n}}$ helyettesítéssel:

$$I=\frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{\infty}\frac{dz}{\left(1+\frac{z^2}{n}\right)^n}.$$

Az

$$\frac{1}{\left(1+\frac{z^2}{n}\right)^n}=\left(1+\frac{z^2}{n}\right)^{-n}\to e^{-z^2},$$

amikor $n\to\infty$, növekvő n-nel monoton csökken! Így az $n\to\infty$ *határátmenet* — az α)-ban tanultak értelmében — *az integráljel alatt* végezhető el. K értéke tehát (a határértéket az ún. *Wallis*-formula* figyelembevételével számítva):

$$K=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{dz}{\left(1+\frac{z^2}{n}\right)^n}=\int_0^{\infty}e^{-z^2}dz=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\,\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

* L. pl. *Stachó* i. m.

β | **1.** Az α *paraméter szerinti deriválással* határozzuk meg az

$$I=\int_0^\infty \frac{1-\cos \alpha x}{x} e^{-kx}\,dx, \qquad \alpha, k>0$$

integrál értékét!

A 3. tétel követelményei teljesülnek, így az α szerinti *deriválás az integráljel alatt végezhető*:

$$\frac{dI}{dx}=\int_0^\infty \frac{d}{dx}\left(\frac{1-\cos \alpha x}{x} e^{-kx}\right) dx=\int_0^\infty e^{-kx} \sin \alpha x\,dx=\frac{\alpha}{\alpha^2+k^2}.$$

Ezt integrálva α szerint:

$$I=\frac{1}{2}\int \frac{2\alpha\,d\alpha}{\alpha^2+k^2}=\frac{1}{2}\ln(\alpha^2+k^2)+C.$$

A C *integrálási állandó meghatározására* egyeztessük (valamely célszerű α értéknél) I eredeti és új kifejezését. Mivel $\alpha=0$-nál $I=0$, így $C=-\frac{1}{2}\ln k^2$, és vele a kérdezett integrál:

$$I=\frac{1}{2}\ln\frac{\alpha^2+k^2}{k^2}.$$

2. $I=\int_0^\infty \frac{1-e^{-t}}{t}\cos t\,dt=?$ — *Paramétert* (α) vezetünk be $I=\int_0^\infty \frac{1-e^{-\alpha t}}{t}\cos t\,dt$ módon. A megkívánt feltételek teljesülvén, az előző példa mintájára α *szerint deriválunk majd integrálunk* végül $\alpha\to 1$ *határátmenet*tel nyerjük: $I=\ln\sqrt{2}$.

3. $I=\int_0^\infty \frac{\ln(1+a^2x^2)}{b^2+x^2}dx$, $(a, b>0)$. — Jelen esetben I *folytonos* minden $a\geqq 0$-ra; a *majoráns:*

$$\frac{\ln(1+a_1^2x^2)}{b^2+x^2},$$

ahol $0\leqq a\leqq a_1$. Deriváltja $a>0$-ra:

$$\frac{dI}{da}=\int_0^\infty \frac{2a\,x^2}{(b^2+x^2)(1+a^2x^2)}\,dx=\frac{\pi}{ab+1},$$

ahol a *majoráns:*

$$\frac{2a_1x^2}{(b^2+x^2)(1+a_0^2x^2)}, \quad \text{ha} \quad 0<a_0\leqq a\leqq a_1.$$

Integrálva a $\frac{dI}{da}$-t a szerint, nyerjük:

$$I=\frac{\pi}{b}\ln(ab+1),$$

mert $a=0$-nál $I(0)=0$, s emiatt $C=0$.

4. $I=\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} rx}{x(1+x^2)}\,dx$, $r\geqq 0$. — A *derivált* $r\geqq 0$-ra:

$$\frac{dI}{dr}=\int_0^\infty \frac{dx}{(1+r^2x^2)(1+x^2)}=\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{1+r};$$

a *majoráns:* $\frac{1}{1+x^2}$. A $\frac{dI}{dr}$-t r szerint *integrálva* és a C-t meghatározva:

$$I=\frac{\pi}{2}\ln(1+r).$$

5. $I=\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2bx\,dx=?$ — Itt: $\frac{dI}{db}=\leqq\int_0^\infty e^{-x^2}2x\sin 2bx\,dx$. *Parciális integrálással:*

$$\frac{dI}{db}=-2b\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2bx\,dx=-2bI.$$

Az I meghatározása tehát a

$$\frac{dI}{db}+2bI=0$$

(szeparálható) *differenciálegyenlet* megoldását kívánja:

$$\int\frac{dI}{I}=-2\int b\,db. \qquad I=Ce^{-b^2}.$$

Még a C integrálási állandót kell meghatározni. Mivel $b=0$-nál

$$I(0)=\int_0^\infty e^{-x^2}dx=C=\frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

így végül:

$$I=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-b^2}.$$

6. $I=\int_0^\infty e^{-x^2}\sin 2bx\,dx=?$ — Az előbbihez hasonló úton a

$$\frac{dI}{db}+2bI=1$$

(elsőrendű lineáris inhomogén) *differenciálegyenlet*re jutunk. Az $I = C(b)e^{-b^2}$ feltevéssel az $I(0) = 0$ figyelembevételével nyerjük:

$$I = e^{-b^2} \int_0^b e^{t^2}\, dt.$$

Az eredmény láthatóan egy *nem elemi függvény* segítségével fejezhető ki.

7. $$I = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{a}}\, e^{-ax^2 - \frac{b^2}{x^2}}\, dx = \int_0^\infty e^{-y^2 - \frac{c^2}{y^2}}\, dy = ? \quad (c^2 = ab,\ y = \sqrt{a}x).$$

Az I-t a c szerint *deriválva*, nyerjük:

$$\frac{dI}{dc} = -2I,$$

közben $y = \frac{c}{z}$ helyettesítéssel élve. *Integrálva* és a C-t meghatározva, végül:

$$I = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-2\sqrt{ab}}.$$

8. $$I = \int_0^\infty \frac{e^{-at}\cos bt - e^{-a_1 t}\cos b_1 t}{t}\, dt = ? \qquad (a, a_1 > a).$$

Az a és b paraméter szerint *parciálisan deriválva:*

$$\frac{\partial I}{\partial a} = -\int_0^\infty e^{-at}\cos bt\, dt = -\frac{a}{a^2 + b^2},$$

$$\frac{\partial I}{\partial b} = -\int_0^\infty e^{-at}\sin bt\, dt = -\frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Pl. a $\frac{\partial I}{\partial a}$*-t integrálva a szerint:*

$$I = -\frac{1}{2}\int \frac{2a\, da}{a^2 + b^2} = -\frac{1}{2}\ln(a^2 + b^2) + C(b).$$

Ezt b szerint deriválva és $\frac{\partial I}{\partial b}$*-vel egyeztetve:*

$$\frac{\partial I}{\partial b} = -\frac{b}{a^2 + b^2} + C'(b) = -\frac{b}{a^2 + b^2},\ \text{azaz}\ C'(b) = 0\ \text{és}\ C = \text{const.}$$

Mivel $a_1 = a$ és $b_1 = b$ esetén $I = 0$, így a *keresett állandó:* $C = \frac{1}{2}\ln(a_1^2 + b_1^2)$.

Ezzel:

$$I = \frac{1}{2}\ln\frac{a_1^2 + b_1^2}{a^2 + b^2}.$$

9. Igazoljuk *differenciálegyenlet* útján az (integráljel alatti integrálással nyert)

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{\cos \beta x}{\alpha^2 + x^2}\, dx = \frac{\pi}{2\alpha}\, e^{-\alpha\beta}$$

és

$$I_2 = \int_0^\infty \frac{x \sin \beta x}{\alpha^2 + x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}\, e^{-\alpha\beta}$$

eredményeket!

Az eredményekből látható, hogy $\frac{dI_1}{d\beta} = -I_2$. *További β szerinti deriválás azonban nem lehetséges* az integráljel alatt, mert az eredményben divergens integrál szerepel. *Ezért az I_2-t átalakítjuk:*

$$\frac{dI_1}{d\beta} = -I_2 = -\int_0^\infty \frac{x^2 + \alpha^2 - \alpha^2}{x(\alpha^2 + x^2)} \sin \beta x\, dx = -\int_0^\infty \frac{\sin \beta x}{x}\, dx +$$

$$+ \alpha^2 \int_0^\infty \frac{\sin \beta x\, dx}{x(\alpha^2 + x^2)} = -\frac{\pi}{2} + \alpha^2 \int_0^\infty \frac{\sin \beta x\, dx}{x(\alpha^2 + x^2)},$$

ahol a δ) 2. példa eredményét alkalmaztuk. Ez utóbbi integrál jele alatt *már megengedhető a β szerinti deriválás*, és nyerjük:

$$\frac{d^2 I_1}{d\beta^2} = \alpha^2 \int_0^\infty \frac{\cos \beta x}{(\alpha^2 + x^2)}\, dx = \alpha^2 I_1;$$

vagyis I_1-re a

$$\frac{d^2 I_1}{d\beta^2} - \alpha^2 I_1 = 0$$

differenciálegyenlet áll fenn. Ennek általános megoldása

$$I_1 = C_1 e^{\alpha\beta} + C_2 e^{-\alpha\beta}$$

alakú. Most az *állandók meghatározása* következik. Mivel

$$|I_1| \leqq \int_0^\infty \frac{dx}{\alpha^2 + x^2} = \frac{\pi}{2\alpha}$$

korlátos, ezért szükségképpen $C_1 = 0$, különben I_1 korlátlanul nőne, a $\lim \beta \to \infty$ esetben $I_1 \to \infty$ volna. A $\beta = 0$ esetben $I_1(0) = \frac{\pi}{2\alpha} = C_2$, tehát *végeredményben:*

$$I_1 = \frac{\pi}{2\alpha}\, e^{-\alpha\beta}, \quad I_2 = -\frac{dI_1}{d\beta} = \frac{\pi}{2}\, e^{\alpha\beta}, \quad \text{q. e. d.}$$

10—12. $I_1 = \int_0^\infty xe^{-ax}\cos bx\,dx = ?$ $\quad I_2 = \int_0^\infty xe^{ax}\sin bx\,dx = ?,$

$$I_3 = \int_0^\infty x^2e^{-ax}\cos bx\,dx = ? \qquad (a>0).$$

Kiindulunk az ismert

$$I_0 = \int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{a}{a^2+b^2}$$

integrálból. (L. 10. § a. α) 19. példát.) Az *a paraméter szerinti deriválással* kapjuk:

$$\int_0^{+\infty}(-xe^{-ax}\cos bx)\,dx = \frac{a^2+b^2-2a^2}{(a^2+b^2)^2} = \frac{b^2-a^2}{(a^2+b^2)^2}.$$

Vagyis:

$$I_1 = \int_0^\infty xe^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{a^2-b^2}{(a^2+b^2)^2}.$$

I_0-t a b paraméter szerint deriválva:

$$\int_0^\infty(-xe^{-ax}\sin bx)\,dx = \frac{-2ab}{(a^2+b^2)^2},$$

tehát:

$$I_2 = \int_0^\infty xe^{-ax}\sin bx\,dx = \frac{2ab}{(a^2+b^2)^2}.$$

I_1-ből a szerinti újabb deriválással:

$$-\int_0^\infty x^2e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{2a(a^2+b^2)^2 - 2(a^2+b^2)\cdot 2a(a^2-b^2)}{(a^2+b^2)^4} =$$

$$= \frac{2a^3+2ab^2-4a^3+4ab^2}{(a^2+b^2)^3}$$

adódik. Innen:

$$I_3 = \int_0^\infty x^2e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{-6ab^2+2a^3}{(a^2+b^2)^3}.$$

Deriváljuk most I_2-t a b paraméter szerint:

$$\int_0^\infty x^2 e^{-ax}\cos bx = \frac{2a(a^2+b^2)^2 - 2(a^2+b^2)\cdot 2b\cdot 2ab}{(a^2+b^2)^4} = \frac{2a^3+2ab^2-8ab^3}{(a^2+b^2)^3} =$$

$$= \frac{2a^3-6ab^2}{(a^2+b^2)^3} = I_3.$$

I_3-at tehát *kétféle* módon is megkaptuk. Az eljárás tovább is *folytatható*, s *a*, illetve *b paraméter szerinti további deriválásokkal az*

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax}\sin bx\,dx, \quad \text{ill.} \quad \int_0^\infty x^n e^{-ax}\cos bx\,dx \qquad (n=1,2,3,\ldots)$$

alakú integrálok is kiszámíthatók.

13. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(a\cos^2 x + b\sin^2 x)^2} = ?$ — *Kiindulva* az ismert

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a\cos^2 x + b\sin^2 x} = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(a+b\,\mathrm{tg}^2 x)\cos^2 x} = \frac{\pi}{2\sqrt{ab}}$$

integrálból [l. A. IV. 2. § ε) 25. példa; a határok behelyettesítése után az előző eredmény adódik], az *a, ill. b paraméter szerinti deriválással* kapjuk:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{-\cos^2 x}{(a\cos^2 x + b\sin^2 x)}\,dx = -\frac{\pi}{4a\sqrt{ab}},$$

illetve

$$\int_0^{\pi/2} \frac{-\sin^2 x}{(a\cos^2 x + b\sin^2 x)^2}\,dx = -\frac{\pi}{4b\sqrt{ab}}.$$

E két utóbbit (−1)-gyel *szorozva és összeadva*, adódik:

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(a\cos^2 x + b\sin^2 x)^2} = \frac{\pi}{4\sqrt{ab}}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right).$$

14. Kiszámítandó az

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2} x^{2n}\,dx$$

integrál!

Kiindulunk az ismert [l. az α) 3. példát, $z=\sqrt{ax}$ helyettesítéssel]

$$\int_{x=0}^{\infty} e^{-ax^2}dx=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} \qquad (a>0)$$

integrálból. *Differenciálva* mindkét oldalt az a paraméter szerint, nyerjük:

$$\int_0^{\infty} x^2e^{-ax^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{4}(a)^{-\frac{3}{2}},$$

ahol a negatív jelet mindkét oldalról elhagytuk. Ezt *ismételten differenciálva* a szerint, az *n-edik deriválás után* ezt kapjuk:

$$\int_0^{\infty} x^{2n}e^{-ax^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2^n}\,a^{-\frac{2n+1}{2}}.$$

Az a-t 1-*nek véve*, éppen a keresett I integrál értéke adódik:

$$I=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2^n}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2^n}\cdot\frac{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}=$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{(2n)!}{2^n\cdot 2^n\cdot 1\cdot 2\cdot 3\ldots n}=\frac{(2n)!}{2^{2n+1}n!}\sqrt{\pi}.$$

15. Igazoljuk, hogy

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}-e^{-ax}}{x}dx=\ln a, \qquad a>0.$$

Ugyanis írható:

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy}dx=\frac{1}{y},$$

amiről *elemi úton* könnyen meggyőződhetünk. *Ebből:*

$$\int_1^a\frac{dy}{y}=\int_0^{+\infty}\left[\int_1^a e^{-xy}dy\right]dx=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}-e^{-ax}}{x}dx=\ln a, \quad \text{q. e. d.}$$

16. $\displaystyle\int_0^b\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}$. — Számítsuk ki *ennek alapján* az

$$I=\int_0^b \frac{dx}{(x^2+a^2)^3}$$

integrál értékét.

γ | **1.** $A=\int_0^\infty e^{-ax} I_0(x)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-ax}\,dx\int_0^{\pi/2}\cos(x\sin\Theta)\,d\Theta=?\quad (a>0),$

ahol $I_0(x)$ az ún. 0-adrendű *Bessel*-függvény.*

Az *integrál átrendezése* megengedett, mert az

$$\int_0^\infty e^{-ax}\cos(x\sin\Theta)\,dx$$

integrál Θ-ban *egyenletesen összetartó* (e^{-ax} *majoráns*sal igazolható). Ily módon:

$$A=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} d\Theta\int_0^\infty e^{-ax}\cos(x\sin\Theta)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{a\,d\Theta}{a^2+\sin^2\Theta}=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}.$$

Az $\int_0^\infty I_0(x)\,dx$ is *összetartó*, mert A az a-nak *folytonos* függvénye, $a=0$-nál is.

Így értéke:

$$\lim_{a\to 0} A(a)=\lim_{a\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}=1.$$

2. $\int_0^\infty e^{-ax^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$, $a>0$ (l. β) 14., ill. α) 3. példát). Határozzuk meg az

$$I=\int_0^\infty \frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x^2}\,dx$$

integrál értékét ($b>a>0$).

Integrálva az a paraméter szerint:

$$-\int_0^\infty \frac{e^{-ax^2}}{x^2}\,dx=\sqrt{a\pi}+C_1;$$

az a helyett b-t írva:

$$-\int_0^\infty \frac{e^{-bx^2}}{x^2}\,dx=\sqrt{b\pi}+C_2;$$

* L. bővebben a B. VI. kötetben.

az előbbit az utóbbiból *kivonva:*

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x^2}\,dx = \sqrt{\pi}(\sqrt{b}-\sqrt{a})+C.$$

Mivel $a=b$ esetben $I=0$, így $C=0$; ezáltal:

$$I=\sqrt{\pi}(\sqrt{b}-\sqrt{a}).$$

3. $I_0=\int_0^1 x^n\,dx=\frac{1}{n+1}$. Ennek *felhasználásával* számítsuk ki az

$$I=\int_0^1 \frac{x^\beta-x^\alpha}{\ln x}\,dx \qquad (\alpha>-1,\ \beta>-1)$$

integrált.

4. Kiszámítandó:

$$I=\int_0^\infty \frac{1-e^{-ax}}{xe^x}\,dx \qquad (a>-1).$$

(*Deriváljunk* az a paraméter szerint; az így kapott integrál egyszerűen számítható, s ebből az a szerinti *integrálás*sal nyerjük a keresett integrál értékét.)

5. *Hasonlóan* számítható az $I=\int_0^\infty \frac{1-e^{-ax}}{xe^{x^2}}$ integrál.

δ 1. $I=\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx$, $0<a<1$. — Az I-t kettéosztva: $I=\int_0^1+\int_1^\infty=I_1+I_2$.

Ha $0<x<1$, az integrandus *sorba fejthető* így:

$$x^{a-1}(1+x)^{-1}=x^{a-1}(1-x+x^2-x^3+-\ldots)=\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^\nu x^{\nu+a-1}\ .$$

E sor *csak akkor egyenletesen összetartó,* ha $0<\varepsilon\leqq x\leqq 1-\varepsilon'<1$; mégis az egész $[0,1]$ szakaszon *tagonként integrálható* (a részletösszeg ui. a teljes $[0,1]$ közön integrálható a

$$0\leqq\sum_{\nu=0}^{n-1}(-1)^\nu x^{\nu+a-1}=x^{a-1}\sum_{\nu=0}^{n-1}(-x)^\nu=-x^{a-1}\frac{(-x)^n-1}{1+x}<x^{a-1}$$

*majoráns*ra való tekintettel, melynek integrálja az $x=0$ és $x=1$ helyeken is egyenletesen összetartó).

Az *integrálást* elvégezve:

$$I_1 = \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_0^1 (-1)^\nu x^{\nu+a-1}\, dx = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \left[\frac{x^{\nu+a}}{\nu+a}\right]_0^1 = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu+a}.$$

Az I_2 integrál $x = \frac{1}{z}$ *helyettesítéssel*:

$$I_2 = \int_0^1 \frac{z^{-a}}{1+z}\, dz = \int_0^1 \frac{x^{(1-a)-1}}{1+x}\, dx,$$

mely — az előbbiek szerint — a következő *végtelen sorral* helyettesíthető:

$$I_2 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{a-\nu}.$$

Így:

$$I = I_1 + I_2 = \frac{1}{a} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu \left(\frac{1}{a+\nu} + \frac{1}{a-\nu}\right) = \frac{1}{a} + 2a \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{a^2-\nu^2} = \frac{\pi}{\sin \pi a}.$$

(L. 9. § b. γ), az $\frac{1}{\sin x}$ sorában x helyébe $a\pi$-t írva és π-vel végigszorozva.)

Ugyanezen eredmény a

$$H = \int_0^\infty \frac{z^{2m}}{1+z^{2n}}\, dz = \frac{\pi}{2n} \cdot \frac{1}{\sin \frac{2m+1}{2n}\pi} \qquad (m < n)$$

eredmény felhasználásával is nyerhető, $z = x^{2n}$ *helyettesítéssel*; ui. ekkor

$$\int_0^\infty \frac{x^{\frac{2m+1}{2n}-1}}{1+x}\, dx = \frac{\pi}{\sin \frac{2n+1}{2n}\pi},$$

ahol $\frac{2m+1}{2n} = a$ jelölést bevezetve, a fenti integrál és eredménye adódik. Ez utóbbi eljárás *jogosultsága* igazolható!*

2. $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = ?$ — Vizsgáljuk az $I_0 = \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx$, $\alpha > 0$ integrált. A $\frac{dI_0}{d\alpha} = \int_0^\infty \cos \alpha x\, dx$ út nem járható, az utóbbi integrál *divergens* lévén. Ezért az e^{-kx}, $k > 0$ *konvergenciafaktor* bevezetésével:

$$I = \int_0^\infty e^{-kx} \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx, \qquad \alpha \geqq 0.$$

* L. bővebben Фихтенгольц i. m. II. kt. 484. l.

Az α szerinti *deriválás* az integrál jele alatt lehetséges, mert az integrandus és α szerinti parciális deriváltja $x \geqq 0$ és $\alpha \geqq 0$ esetén *folytonos:*

$$\frac{dI}{d\alpha} = \int_0^\infty e^{-kx} \cos \alpha x \, dx.$$

(Ez utóbbi integrál α-ban *egyenletesen folytonos,* $\int_0^\infty e^{-kx} dx$ *majoránsra* való tekintettel.)

$$\frac{dI}{d\alpha} = \frac{k}{\alpha^2 + k^2}.$$

Ezt α szerint integrálva:

$$I = \operatorname{arc\,tg} \frac{\alpha}{k}.$$

$$[I = 0, \quad \text{ha} \quad \alpha = 0, \quad \text{így} \quad C = 0.]$$

Itt $\alpha = \text{const}$ esetén I minden $k \geqq 0$-nál *folytonos,* tehát I a $k \geqq 0$ esetén k-ban *egyenletesen konvergens.* Így:

$$I_0 = \lim_{k \to +0} I = \lim_{k \to +0} \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{k} = \operatorname{arc\,tg}(+\infty) = \frac{\pi}{2} \left[\neq f(\alpha) \right],$$

tehát bármilyen $\alpha > 0$ esetén:

$$I_0 = \int_0^\infty \lim_{k \to +0} \left(e^{-kx} \frac{\sin \alpha x}{x} \right) dx = \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x} \, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Ha $\alpha = 1$, akkor szintén:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Ha $\alpha < 0$, hasonló módon: $I_0 = -\frac{\pi}{2}$, ha $\alpha = 0$, akkor: $I_0 = 0$ eredmény adódik.

Végeredményben *Kronecker* jelölésével:

$$\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x} \, dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} \alpha,$$

ahol

$$\operatorname{sign} \alpha = \begin{cases} +1, & \text{ha } \alpha > 0, \\ 0, & \text{ha } \alpha = 0, \\ -1, & \text{ha } \alpha < 0. \end{cases}$$

Megjegyzendő, hogy a (fentiek szerint β-ban egyenletesen konvergens)

$$\int_0^\infty e^{-kx} \cos \beta x \, dx = \frac{k}{\beta^2 + k^2}$$

integrál β szerinti (és az $\int_0^\infty$ alatt végrehajtható) integrálásával, azaz

$$\int_{\beta=0}^{\beta=a} d\beta \int_0^\infty e^{-kx} \cos \beta x \, dx = \int_0^\infty dx \int_0^a e^{-kx} \cos \beta x \, d\beta = \int_0^\infty e^{-kx} \frac{\sin \alpha x}{x} dx =$$

$$= \int \frac{k}{\alpha^2 + k^2} \, d\alpha = \operatorname{arc\,tg} \frac{\alpha}{k}$$

módon is eljárhattunk volna!

3. $I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = ?$ *(Euler—Poisson)* — Az $x = ut$ *helyettesítés*sel (u tetszés szerinti *pozitív* szám):

$$I = u \int_0^\infty e^{u^2 t^2} dt.$$

Megszorozva mindkét alakot $e^{-u} du$-val, majd *integrálva* u szerint 0-tól ∞-ig, nyerjük:

$$I \cdot \int_0^\infty e^{-u^2} du = I^2 = \int_0^\infty e^{-u^2} u \, du \int_0^\infty e^{-u^2 t^2} dt.$$

Az integrálok *átrendezés*ével:

$$I^2 = \int_0^\infty dt \int_0^\infty e^{-(1+t^2)u^2} u \, du = \int_0^\infty \frac{1}{2(1+t^2)} \left[e^{-(1+t^2)u^2} \right]_{u=\infty}^{0} \cdot dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Tehát:

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

A fenti átrendezés *megengedett* az 5. tétel szerint, ugyanis az integrandus *pozitív* és *folytonos* minden véges t-re és u-ra, *a két belső integrál* pedig:

$$\int_0^\infty e^{-(1+t^2)u^2} u \, dt = e^{-u} I,$$

illetve

$$\int_0^{\infty} e^{-(1+t^2)u^2} u\,du = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+t^2}$$

folytonos az 1. u-ban, a 2. t-ben.

Oldjuk meg a feladatot másként!

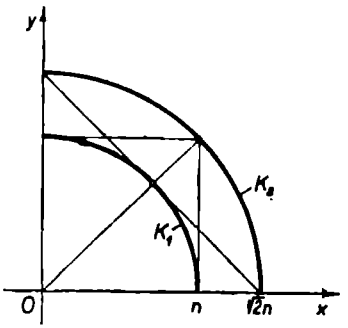
Induljunk ki az

$$\iint_{K_1} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy < \int_{-n}^{+n}\int_{-n}^{+n} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy < \iint_{K_2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

nyilvánvaló *egyenlőtlenség*ből, ahol

$$K_1 \text{ az } x^2+y^2=n^2, \quad K_2 \text{ az } x^2+y^2=2n^2$$

kör belseje (249. ábra).



249. ábra

A K_1 és K_2 menti integrálok *polárkoordinátákkal* egyszerűen adódnak:

$$4I_1^2 = 2\pi\int_{r=0}^{n} e^{-r^2} r\,dr = \pi\left[e^{-r^2}\right]_n^0 = \pi\left[1-e^{-n^2}\right],$$

illetve

$$4I_2^2 = 2\pi\int_0^{\sqrt{2n}} e^{-r} r\,dr = \pi\left[1-e^{-2n^2}\right].$$

A $4I_1^2$ és $4I_2^2$ és így a közrefogott $4I_k^2 \to \pi$, ha $n\to\infty$.

Másrészt fennáll:

$$4I_k^2 = \int_{-n}^{+n}\int_{-n}^{+n} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_{-n}^{+n} e^{-x^2}\,dx \int_{-n}^{+n} e^{-y^2}\,dy = \left[\int_{-n}^{+n} e^{-x^2}\,dx\right]^2.$$

Tehát *a fentiekből* nyerjük:

$$\lim_{n\to\infty} 2I_k = 2I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x}\,dx = 2\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = \sqrt{\pi},$$

és végül:

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

4. $I_1 = \int_0^{\infty} \sin x^2\,dx = ?, \qquad I_2 = \int_0^{\infty} \cos x^2\,dx = ?$ *(Fresnel)*

Az első $x=\sqrt{t}$ *helyettesítéssel* így alakul:

$$I_1=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt.$$

Másrészt az *Euler—Poisson*-integrálból (l. az előző példát), $x=\sqrt{t}\,u$ *helyettesítéssel* nyerjük:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\int_0^{\infty}e^{-x}\,dx=\sqrt{t}\int_0^{\infty}e^{-tu}\,du,\quad\text{azaz}\quad\frac{1}{\sqrt{t}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-tu^2}\,du.$$

Az $\frac{1}{\sqrt{t}}$ eme kifejezését *beírva* az átalakított I_1-be, lesz:

$$I_1=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\sin t\,dt\int_0^{\infty}e^{-tu}\,du.$$

Az integrálás sorrendjét *megcserélve*, kapjuk, hogy:

$$I_1=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}du\int_0^{\infty}e^{-u^2t}\sin t\,dt=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{du}{1+u^4}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\pi}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

(Felhasználtuk a 10. § c) δ) 3. példa eredményét.)

Egészen *hasonlóan* nyerhető:

$$I_2=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}=I_1=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Igazolandó még az integrálási *sorrend felcserélésének jogosultsága*. Az e^{-kt} *konvergencia-faktorral* $(k>0)$:

$$\frac{1}{2}\int_0^{\infty}e^{-kt}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-kt}\sin t\,dt\int_0^{\infty}e^{-u^2t}\,du=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}du\int_0^{\infty}e^{-(k+u^2)t}\sin t\,dt=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{du}{1+(k+u^2)^2}.$$

Az itt alkalmazott *átrendezést* az 5. tétel biztosítja. Végül a $k\to 0$ *határátmenetet az integrál jele alatt* elvégezve (jogossága egyszerűen igazolható), nyerjük az

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{du}{1+u^4}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

eredményt!

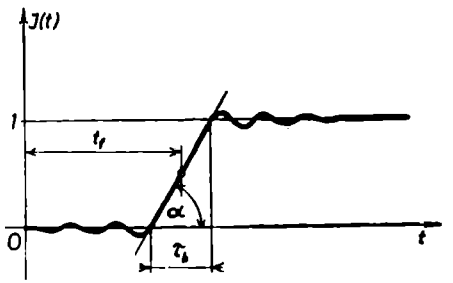
Műszaki alkalmazás

JELSOROZAT BEREZGÉSI IDEJE

Az egyszerű áramú jelsorozat esetén *az áramerősség* (vagy a feszültség) *időbeli lefolyását* az

$$I(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\int_0^{\omega_H}\frac{\sin\omega(t-t_f)}{\omega}\,d\omega$$

függvény írja le. Az ω_H körfrekvencián felüli rezgéseket a *szűrő „levágja"*. A t_f a görbe *inflexiós* pontjának az abszcisszája. A τ_b *berezgési időt* keressük.



250. ábra

A 250. ábrán látható *derékszögű háromszögből*

$$\operatorname{tg}\alpha_f=\frac{1}{\tau_b}=\left[\frac{dI(t)}{dt}\right]_f=0+$$

$$+\frac{1}{\pi}\left[\frac{d}{dt}\int_0^{\omega_H}\frac{\sin\omega(t-t_f)}{\omega}\,d\omega\right].$$

A t paraméter szerinti differenciálás az integráljel alatt végezhető (l. a. γ) 3. tétel).

Tehát:

$$\operatorname{tg}\alpha_f=\frac{1}{\tau_b}=\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^{\omega_H}\frac{d}{dt}\left[\frac{\sin\omega(t-t_f)}{\omega}\right]\cdot d\omega\right\}_f=\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^{\omega_H}\frac{\omega\cos\omega(t-t_f)}{\omega}\,d\omega\right\}_f=$$

$$=\left\{\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin\omega(t-t_f)}{t-t_f}\right]_0^{\omega_H}\right\}_f=\left\{\frac{1}{\pi}\,\frac{\sin\omega_H(t-t_f)}{t-t_f}\right\}_f=\frac{\omega_H}{\pi}\lim_{t\to t_f}\frac{\sin\omega_H(t-t_f)}{\omega_H(t-t_f)}=$$

$$=\frac{\omega_H}{\pi}\cdot 1=\frac{\omega_H}{\pi}=\frac{2\pi f_H}{\pi}=2f_H.$$

A keresett berezgési idő ennélfogva

$$\tau_b=\frac{1}{2f_H}.$$

12. §. STIELTJES-INTEGRÁL

a) A Stieltjes-integrál fogalma

A Stieltjes-integrál a Riemann-integrál egyenes általánosítása, a következő módon.

Legyen adva az $[a, b]$ közön *két korlátos függvény*, $f(x)$ és $g(x)$. Az $[a, b]$ közt *osszuk fel* az

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

osztópontokkal Δx_i részszakaszokra, és legyen ezek *legnagyobbika* $\lambda = \max \Delta x_i = \max(x_{i+1} - x_i)$, ahol $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. *Válasszunk* minden $[x_i, x_{i+1}]$ részszakaszon egy ξ_i pontot, *szorozzuk* az $f(x)$ függvény ezekhez tartozó $f(\xi_i)$ *értékét a* $g(x)$ függvénynek a megfelelő $[x_i, x_{i+1}]$ részszakaszra vonatkozó növekményével, $\Delta g(x_i) = g(x_{i+1}) - g(x_i)$-vel. Végül *összegezzük* az $[a, b]$ szakasz összes Δx_i részszakaszára vonatkozólag ezen $f(\xi_i)\,\Delta g(x_i)$ szorzatokat. *Az így képzett*

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta g(x_i)$$

összeg az úgynevezett Stieltjes-összeg.

Ha $\lambda \to 0$ esetén a σ Stieltjes-összeg — az $[a, b]$ szakasz beosztásának módjától és a $\xi_i - k$ választásától függetlenül — határozott véges határértékhez tart, akkor e határértéket az $f(x)$ függvény $g(x)$ függvény szerinti Stieltjes-integráljának nevezzük. Jele:

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = \lim_{\lambda \to 0} \sigma = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta g(x_i).$$

Fontos hangsúlyozni, hogy az integrál *Stieltjes-értelemben* veendő; e tényt az

$$(S) \int_a^b f(x)\,dg(x), \quad \text{vagy} \quad \mathbf{S}\int_a^b f(x)\,dg(x)$$

*jelölés*sel szokás kifejezésre juttatni.

Az előbbi határérték létezése esetén azt is mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény az $[a, b]$ szakaszon a $g(x)$ függvény szerint integrálható.

Látható, hogy a $g(x) = x$ *speciális eset*ben éppen a közönséges *Riemann-féle integrál*ra jutunk.

b) A Stieltjes-integrál létezésének általános feltétele és létezési eseteinek osztályozása

α) Az integrál létezésének feltétele

A következőkben *a* $g(x)$ *függvényt mindig monoton növekvőnek tételezzük fel. A Darboux-összegek mintájára az*

$$s=\sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta g(x_i), \quad \text{illetve} \quad S=\sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta g(x_i)$$

összeget alsó, ill. felső Darboux—Stieltjes-összegnek nevezzük: itt m_i és M_i az $f(x)$ függvénynek az $[x_i, x_{i+1}]$ részszakaszon felvett *minimális* és *maximális* értéke.

Ezekhez képest a σ *Stieltjes-összeg*

$$s \leqq \sigma \leqq S$$

nagyságú, vagyis az s és S a σ pontos korlátai.

A *Darboux—Stieltjes-összeg* a közönséges integrálösszeghez hasonlóan a következő *két tulajdonság*gal rendelkezik:

Első tulajdonság: *Ha a meglevő osztáspontokat új pontokkal egészítjük ki, akkor az alsó Darboux—Stieltjes-összeg csak növekedhet, a felső összeg csak csökkenhet.*

Második tulajdonság: *Bármely alsó Darboux—Stieltjes-összeg nem lehet nagyobb, mint akármely felső összeg, a szakasznak másféle részszakaszbeosztása esetén sem.*

Ha *bevezetjük az alsó, illetve felső Darboux—Stieltjes-integrált:*

$$I_* = \sup\{s\} \quad \text{és} \quad I^* = \inf\{S\},$$

akkor *bizonyítható, hogy:*

$$s \leqq I_* \leqq I^* \leqq S.$$

Tétel: *A Stieltjes-integrál létezésének szükséges és elégséges feltétele, hogy:*

$$\lim_{\lambda \to 0} (S-s)=0, \quad \text{vagy} \quad \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta g(x_i)=0,$$

ahol $\omega_i = M_i - m_i$ az $f(x)$ ún. *ingadozása* az $[x_i, x_{i+1}]$ részszakaszon.

β) A Stieltjes-integrál létezési eseteinek osztályozása

β_1) *Ha* $f(x)$ *folytonos függvény, a* $g(x)$ *pedig korlátos változású* (vagyis a

$$\sum_{i=0}^{n-1} |g(x_{i+1})-g(x_i)|$$

összegek az $[a, b]$ köz akármilyen beosztásánál felülről korlátosak maradnak), *akkor az*

$$\int_a^b f(x)\, dg(x)$$

Stieltjes-integrál létezik.

β_2) *Ha* $f(x)$ *az* $[a, b]$ *közön Riemann szerint integrálható függvény, a* $g(x)$ *pedig eleget tesz az*

$$|g(\bar{x})-g(x)| \leqq L(\bar{x} \leqq x)$$

Lipschitz-féle feltételnek, ahol $L = \text{const}$, $a \leqq x < \bar{x} \leqq b$, *akkor az*

$$\int_a^b f(x)\, dg(x)$$

Stieltjes-integrál létezik.

β_3) *Ha $f(x)$ Riemann szerint integrálható függvény, a $g(x)$ függvény pedig előállítható a*

$$g(x) = c + \int_a^x \varphi(t)\, dt$$

változó felső határú integrál alakban, ahol $\varphi(t)$ az $[a, b]$ közön abszolút integrálható, akkor az

$$\int_a^b f(x)\, dg(x)$$

Stieltjes-integrál létezik.

c) A Stieltjes-integrál sajátságai. Parciális integrálás

α) **Főbb sajátságok**

1. $\displaystyle\int_a^b dg(x) = g(b) - g(a).$

2. $\displaystyle\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]\, dg(x) = \int_a^b f_1(x)\, dg(x) \pm \int_a^b f_2(x)\, dg(x).$

3. $\displaystyle\int_a^b f(x)\, d[g_1(x) \pm g_2(x)] = \int_a^b f(x)\, dg_1(x) \pm \int_a^b f(x)\, dg_2(x).$

4. $\displaystyle\int_a^b k \cdot f(x)\, d[l \cdot g(x)] = kl \cdot \int_a^b f(x)\, dg(x), \quad k \text{ és } l = \text{const},$

ahol a 2., 3. és 4.-nél a jobb oldali integrálok *létezéséből* következik a bal oldaliaké.

5. $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dg(x) = \int_a^c f(x)\, dg(x) + \int_c^b f(x)\, dg(x),$

feltéve, hogy $a < c < b$, és mindhárom integrál létezik.

Ha az $\int_a^b f\,dg$ *integrál létezik, ebből már következik az* $\int_a^c f\,dg$ *és* $\int_c^b f\,dg$ *két integrál létezése. Fordítva általában nem igaz!*

β) **Parciális integrálás** Fennáll a következő formula:

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = \Big[f(x)\,g(x)\Big]_a^b - \int_a^b g(x)\,df(x),$$

feltéve, hogy a két integrál közül valamelyik létezik; ebből a másik integrál *létezése* már következik. *Ez a parciális integrálás formulája.*

Ha $g(x)$ függvény az $[a, b]$ közön $f(x)$ szerint integrálható, akkor $f(x)$ függvény is integrálható $g(x)$ szerint.

d) Stieltjes-integrálok kiszámítása

α *Ha $f(x)$ integrálható az $[a, b]$ közön Riemann szerint, és $g(x)$ a következő alakú:*

$$g(x) = c + \int_a^x \varphi(t)\,dt,$$

ahol $\varphi(t)$ az $[a, b]$ közön abszolút integrálható függvény, akkor fennáll:

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx,$$

ahol a jobb oldali Riemann-, a bal oldali Stieltjes-integrál. A jobb oldali *létezik* s a b) β_3) szerint a bal oldali is.

β *Ha $f(x)$ integrálható az $[a, b]$ közön Riemann szerint, a $g(x)$ ugyanott folytonos, a $g'(x)$ derivált pedig létezik (véges számú pont kivételével), és az $[a, b]$ közön abszolút integrálható,* akkor fennáll:

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

Látható, hogy a $dg(x)$ differenciált $g'(x)\,dx$ kifejezésével cseréltük fel.

γ *Legyen $f(x)$ az $[a, b]$ közön folytonos, a $g(x)$-nek ugyanott létezzék (véges számú pont kivételével) $g'(x)$ deriváltja, s ez legyen az $[a, b]$ közön abszolút integrálható. Legyen továbbá $g(x)$-nek az*

$$x_0 = a < x_1 < \ldots < x_k < \ldots < x_m = b$$

pontokban elsőfajú szakadása. Akkor létezik a Stieltjes-integrál, és kifejezhető így:

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = \int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx + f(a)\,[g(a+0)-g(a)] +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m-1} f(x_k)\,[g(x_k+0)-g(x_k-0)] + f(b)\,[g(b)-g(b-0)].$$

Példák

1. $\int_0^2 x^2\,d\ln(1+x) = \int_0^2 \frac{x^2\,dx}{1+x} = \left[\frac{1}{2}x^2 - x + \ln(1+x)\right]_0^2 = \ln 3.$

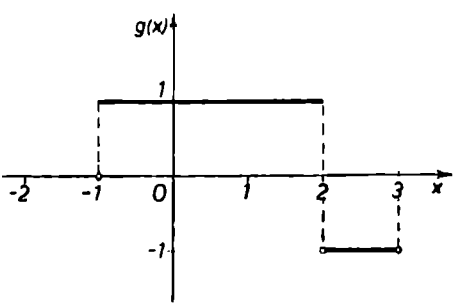
A d) β) szerint jártunk el.

2. $\int_0^2 x\,d\operatorname{arc\,tg} x = \int_0^2 \frac{x\,dx}{1+x_2} = \frac{1}{2}\left[\ln(1+x^2)\right]_0^2 = \ln\sqrt{5}.$

A d) β) szerint dolgoztunk.

3. $\int_{-1}^3 x\,dg(x)$, ahol (251. ábra)

$$g(x) = \begin{cases} 0, \text{ ha } x = -1 \\ 1, \text{ ha } -1 < x < 2 \\ -1, \text{ ha } 2 \leqq x \leqq 3. \end{cases}$$



251. ábra

A $g(x)$ érték *ugrik* $x = -1$-nél $+1$-gyel, $x = 2$-nél -2-vel, *egyebütt* $g'(x) = 0$. Így a d) γ) szerint:

$$\int_{-1}^3 x\,dg(x) = (-1)\cdot 1 + 2\cdot(-2) = -5.$$

4. $\int_0^2 x^2\,dg(x)$, ahol $g(x) = \begin{cases} -1, \text{ ha } 0 \leqq x < \frac{1}{2} \\ 0, \text{ ha } \frac{1}{2} \leqq x < \frac{3}{2} \\ 2, \text{ ha } x = \frac{3}{2} \\ -2, \text{ ha } \frac{3}{2} < x \leqq 2 \end{cases}$ (252. ábra).

A $g(x)$ érték *ugrik* $x=\frac{1}{2}$-nél $+1$-gyel, $x=\frac{3}{2}$-nél $+2-4=-2$-vel, *egyebütt* $g'(x)=0$.

Így a *d) γ)* szerint:

$$\int_0^2 x^2\,dg(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot(+1)+\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot(-2)=-2.$$

5. $\int_{-2}^{2} x\,dg(x)=?$ $\int_{-2}^{2} x^2\,dg(x)=?$ $\int_{-2}^{2}(x^3+1)\,dg(x)=?$,

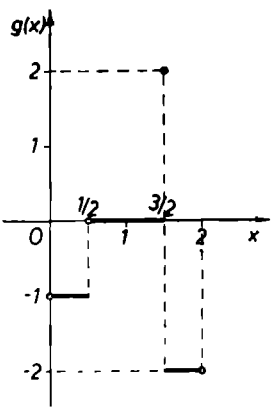
ahol most:

$$g(x)=\begin{cases} x+2, \text{ ha } -2\leqq x\leqq -1\\ 2, \text{ ha } -1<x<0\\ x^2+3, \text{ ha } 0\leqq x\leqq 2.\end{cases}$$

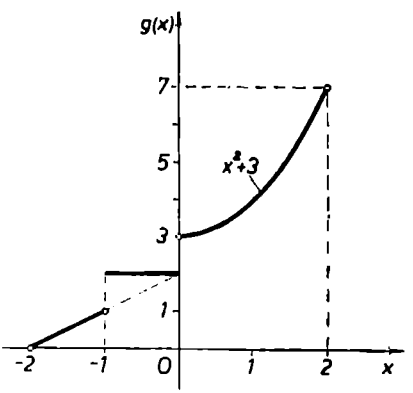
A $g(x)$-érték *ugrik* 1-gyel $x=-1$-nél és $x=0$-nál.

A $g(x)$ deriváltja:

$$g'(x)=\begin{cases} 1, \text{ ha } -2\leqq x<-1\\ 0, \text{ ha } -1<x<0\\ 2x, \text{ ha } 0<x<2\end{cases}$$ (253. ábra).



252. ábra



253. ábra

A d) *γ)* szerint

$$\int_{-2}^{2} x\,dg(x)=\int_{-2}^{-1} x\,dx+2\int_0^2 x^2\,dx+(-1)\cdot 1+0\cdot 1=\frac{17}{6}.$$

Hasonlóan

$$\int_{-2}^{2} x^2\,dg(x)=\int_{-2}^{-1} x^2\,dx+2\int_0^2 x^3\,dx+(-1)^2\cdot 1+0^2\cdot 1=\frac{34}{3}.$$

Végül:

$$\int_{-2}^{2} (x^3 + 1)\, dg(x) = \frac{301}{20}.$$

Műszaki alkalmazások

1. FOLYTONOS ÉS PONTSZERŰ VONAL MENTI TÖMEGMEGOSZLÁS NYOMATÉKA

Az $[a, b]$ *egyenesdarabon* $\varrho(x)$ *vonal menti sűrűségű folytonos és az* $x = x_1, x_2, \ldots, x_k$ *pontokban elhelyezkedő* $m_1, m_2, \ldots, m_k$ *koncentrált (pontszerű) tömegek statikai nyomatéka, a d) γ)* értelmében:

$$M = \int_a^b x\, d\Phi(x) = \int_a^b x\varrho(x)\, dx + \sum_{i=2}^{n} x_i m_i; \qquad \Phi'(x) = \varrho(x),$$

vagyis *a kétféle tömegeloszlás statikai nyomatéka egyetlen Stieltjes-integrállal kifejezhető.*

Hasonlóan az inercianyomaték:

$$I = \int_a^b x^2\, d\Phi(x) = \int_a^b x^2\, \varrho(x)\, dx + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 m_i.$$

Látható, hogy e kétféle tömegeloszlás *Stieltjes-integrállal* számított nyomatékai — e nyomatékok additivitásának megfelelően — a folytonos tömegeloszlás *Riemann-integrállal* számított nyomatékainak és a pontszerű tömegeloszlás *szummával* számított nyomatékainak összegével egyenlők. (Vö. a 7. § a., c. és e.-vel!)

2. MEGOSZLÓ ÉS KONCENTRÁLT ERŐKKEL TERHELT KÉTTÁMASZÚ TARTÓ NYÍRÓERŐ- ÉS HAJLÍTÓNYOMATÉKI ÁBRÁJA*

Adva $l = 3$ hosszúságú *kéttámaszú tartó. Terhelve* van az $x = 1$ helyen $P = 3$ *koncentrált erővel,* végig a $p(x) = \frac{2}{3}x$ *megoszló erővel,* valamint a megfelelő *reakcióerőkkel* (254*a.* ábra).

Fejezzük ki a bal oldali erők eredőjét, az ún. *nyíróerőt* szakadásos függvénnyel, és a bal oldali erők nyomatékát, az ún. *hajlítónyomatékot Stieltjes-integrállal.*

A *reakcióerők* $P = 3$ és $Q = \frac{2}{3}\int_0^3 x\, dx = \frac{1}{3}\left[x^2\right]_0^3 = 3$ lévén: $A + B = P + Q = -6$; mivel a koncentrált P erő $x = 1$-nél és a megoszló erők Q eredője $x = 2$-nél működik; így $A = B = -3$.

* L. Фих тенгольц i. m. III. köt.

A *hajlítónyomaték*, tetszőleges x keresztmetszetre vonatkozólag, a d) γ) és a 7. § f) α) és γ) értelmében:

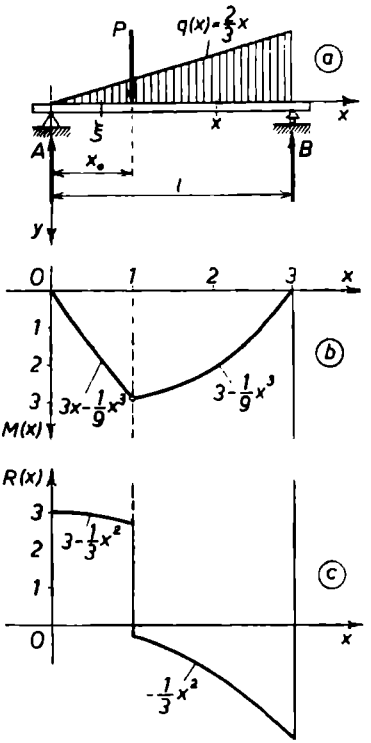
$$M(x) = -\int_0^x (x-\xi)p(\xi)\,d\xi \mp \sum_{i=1}^{n}(x-x_i)P_i = \int_0^x (x-\xi)\,dR(\xi).$$

Az utóbbit *parciálisan* integrálva, nyerjük:

$$M(x) = \Big[(x-\xi)\,R(\xi)\Big]_0^x - \int_0^x R(\xi)\,d(x-\xi) = \int_0^x R(\xi)\,d\xi,$$

lévén $P(0)=0$.

Eszerint: $\dfrac{dM(x)}{dx} = R(x)$, vagyis *a hajlítónyomaték-függvény x helyi deriváltja egyenlő a nyíróerő-függvény ottani értékével* — összhangban a 7. § *f) γ)*-val.



254. ábra

Esetünkben *a bal oldali erők eredője, az ún. nyíróerő:*

$$R(x) = \begin{cases} 0, \text{ ha } x = 0 \\ -\dfrac{1}{3}x^2 + 3, \text{ ha } 0 < x < 1 \\ -\dfrac{1}{3}x^2, \text{ ha } 1 \leqq x < 3 \\ 0, \text{ ha } x = 3 \end{cases}$$

(254*c* ábra). Látható, hogy:

$$R'(x) = -p(x) = -\frac{2}{3}x, \quad \text{ha} \quad 0 < x < 3,$$

vagyis a *nyíróerő-függvény deriváltja a megoszló terhelés függvényének* (-1)*-szerese* — összhangban a 7. § *f) γ)*-val.

Ezeket figyelembe véve *a bal oldali erők nyomatéka, az ún. hajlítónyomaték* így alakul:

$$M(x)=\begin{cases} \text{ha } 0\leqq x\leqq 1: M(x)=\int_0^x (x-\xi)\,dR(\xi)=(x-0)\cdot 3+\int_0^x (x-\xi)R'(\xi)\,d\xi= \\ \quad =3x-\int_0^x (x-\xi)\cdot\frac{2}{3}\,d\xi=3x-\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{9}x^3=-\frac{1}{9}x^3+3x; \\ \text{ha } 1<x\leqq 3: M(x)=\int_0^x (x-\xi)\,dR(\xi)=(x-0)\cdot 3+\int_0^x (x-\xi)R'(\xi)\,d\xi- \\ \quad -(x-1)\cdot 3+\int_1^x (x-\xi)R'(\xi)\,d\xi=3x-3x+3-\int_0^1 (x-\xi)\cdot\frac{2}{3}\xi\,d\xi- \\ \quad -\int_1^x (x-\xi)\cdot\frac{2}{3}\xi\,d\xi=3-\left[\frac{1}{3}x\xi^2-\frac{2}{9}\xi^3\right]_0^x=-\frac{1}{9}x^3+3. \end{cases}$$

(254*b* ábra).

e) Valószínűségi változók jellemzői*

α) Bevezetés Az improprius integrálokkal kapcsolatosan megismerkedtünk a *valószínűségi változó*nak és bizonyos függvényeinek (pl. folytonos változó esetén a sűrűség- és eloszlásfüggvényeinek) a fogalmával. Most ezeknek néhány, sűrűn használatos jellemző adatát, elsősorban az ún. *várható értéket* fogjuk vizsgálni, s ennek során a *Stieltjes-integrál fogalmára is támaszkodunk.*

β) Várható érték. Példák β_1) Egy valószínűségi változó egyes értékeinek valószínűségéről, illetve valószínűségsűrűségéről, valamint az azoknál kisebb értékek fellépésének valószínűségéről a tárgyalt függvények részletesen tájékoztatnak. A gyakorlat viszont azt kívánja, hogy *mindezt kisszámú adattal jellemezzük*, minél megbízhatóbban. Az ilyen jellemző adatok közül *legfontosabb* a ξ *valószínűségi változó ún. várható értéke vagy más néven középértéke, súlyértéke, átlagértéke;* jele: $M(\xi)$ [μ, $E(\xi)$ stb.].

A már több ízben említett mechanikai analogonnál, az egyenes menti (diszkrét vagy folytonos) *tömegeloszlásnál ennek* x_s *súlyponti abszcisszája a várható érték megfelelője.*

Diszkrét változó esetén, ha az x_i *érték* f_i (viszonylagos) gyakoriságú, illetve p_i valószínűségű:

$$M(\xi)=\sum_{i=1}^{k}\frac{x_i n_i}{n}=\sum_{i=1}^{k}x_i f_i.$$

* *Rényi* és *Boee* i. m. alapján.

illetve

$$M(\xi)=\sum_{i=1}^{\infty} x_i P(\xi=x_i)=\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i,$$

ugyanúgy, mint az egyenes menti tömegpontrendszer súlyponti abszcisszája:

$$x_s=\sum_{i=1}^{k}\frac{x_i m_i}{m}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{k} x_i m_i=\frac{\sum_{i=1}^{k} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{k} m_i}.$$

Folytonos változó és $f(x)$ sűrűségfüggvény *esetén:*

$$M(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx,$$

annak megfelelően, hogy az egyenes menti folytonos tömegeloszlás súlypontja:

$$x_s=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x\delta(x)\,dx}{m}=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x\delta(x)\,dx}{\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\,dx}.$$

[Az $M(\xi)$-nél a nevezőt azért nem írjuk ki, mert $\sum_{i=1}^{k} p_i$, ill. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=1$.]

Előfordulhat, hogy az $\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$ végtelen sor, illetve az $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$ improprius integrál *nem konvergens;* ez esetben azt mondjuk, hogy a ξ-nek nem létezik várható értéke. Pontosabban, csak akkor fogunk beszélni egy valószínűségi változó várható értékéről, ha a most említett végtelen sor, illetve improprius integrál *abszolút konvergens.*

β_2) *A Stieltjes-integrál fogalmának felhasználásával lehetséges egy valószínűségi változó értékét olyan alakban definiálni, amely egyaránt alkalmazható diszkrét és folytonos esetre,* továbbá — ami még fontosabb — azon általánosabb esetben is, amikor változó értékeinek száma végtelen, az $F(x)$ eloszlásfüggvény pedig nem differenciálható mindenütt (pl. véges számú pontban nem), vagy pedig $F(x)$ differenciálható ugyan, de nem egyezik meg differenciálhányadosának határozatlan integráljával.*

* L. *Rényi* i. m. 294. o.

Az $F(x)$ eloszlásfüggvényű ξ valószínűségi változó $M(\xi)$ várható értéke most ilyen alakot ölt:

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, dF(x),$$

feltéve, hogy az integrál konvergens. (A fentebbiek szerint az

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| \, dF(x) \quad \text{és} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x \, dF(x)$$

integrálok közül vagy mindkettő konvergens, vagy egyik sem.)

A *Stieltjes*-integrál definíciójából következik, hogy *ha $F(x)$ lépcsős függvény, mégpedig x_i helyeken p_i ugrásokkal ($i = 1, 2, \ldots, k, \ldots$), akkor:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x \, dF(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i;$$

ha pedig $F(x)$ (legfeljebb véges számú pont kivételével) *mindenütt differenciálható* (és differenciálhányadosának egy primitív függvényével megegyezik), *akkor:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x \, dF(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, F'(x) \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, f(x) \, dx.$$

Ezekből nyilvánvaló, hogy a várható érték ezen általánosabb definíciója a β_1)-ben diszkrét és folytonos változóra adott definíciót *speciális esetként* magában foglalja. A definícióból kiviláglik, hogy *egy valószínűségi változó várható értéke csak eloszlásától függ, azaz egyforma eloszlású változók várható értékei egyenlők.*

*β_3) A várható érték igazolható tulajdonságai közül megemlítünk néhányat:**

a) $M(c) = c$, ahol $c = \text{const}$.

b) $M(c\xi) = c\,M(\xi)$, ahol $c = \text{const}$.

c) Ha $P\{a \leqq \xi \leqq b\} = 1$, akkor $a \leqq M(\xi) \leqq b$.

d) $M[\xi - M(\xi)] = 0$, azaz a ξ és az $M(\xi)$ eltérésének várható értéke 0.

e) $M(c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \ldots + c_n\xi_n) = c_1 M(\xi_1) + c_2 M(\xi_2) + \ldots + c_n M(\xi_n)$.

f) $M(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = M(\xi_1)M(\xi_2)\ldots M(\xi_n)$, független ξ_i-k esetén.

Példák

β_4) Különböző eloszlású változók várható értékére.

1. Poisson-eloszlás. Ennél — mint a γ_2)-ben láttuk — a ξ valószínűségi változó az $x_i = i$ értékeket (ahol $i = 0, 1, 2, \ldots, k, \ldots$) $p_i = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}$ valószínűséggel veszi fel, és $\lambda = \text{const} > 0$.

* L. bővebben *Rényi* i. m. 305—332. o.

A *várható érték* a $\beta_1)$-ben, illetőleg $\beta_2)$-ben mondottak szerint:

$$M(\xi)=\sum_{i=0}^{\infty} i\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!}\lambda e^{-\lambda}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\lambda^r}{r!}=\lambda e^{-\lambda}e^{\lambda}=\lambda.$$

Ennek alapján a szóban forgó eloszlást λ *várható értékű Poisson-eloszlás*nak nevezhetjük.

Hangsúlyozzuk, hogy a $\beta_2)$ értelmében most tulajdonképpen azon $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dF(x)$ *Stieltjes*-integrált számítottuk ki, amelyben

$$F(x)=\sum_{i<x}\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}$$

lépcsős függvény, az $x_i=i$ helyeken $p_i=\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}$ ugrásokkal.

2. Normális eloszlás. *Sűrűségfüggvénye*, mint a 10. § d) $\gamma_3)$-ban láttuk:

$$f(x)=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2(x-m)^2}.$$

Szokásos *másik alakja*, $h=\frac{1}{2\sigma^2}$ új jelöléssel:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},$$

ahol σ tetszőleges pozitív és m tetszőleges valós paraméter. A *várható érték* most:

$$M(\xi)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x-m}{\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx+\frac{m}{\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx\right]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\sigma\int_{-\infty}^{+\infty}ue^{-\frac{u}{2}}du+2\sqrt{2}m\int_{0}^{+\infty}e^{-t^2}dt\right]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[0+2\sqrt{2}m\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right]=m,$$

ahol felhasználtuk az első integrálandó páratlanságát, valamint az 11. § c) $\delta)$ 3. példából ismert Poisson-integrál eredményét. A sűrűségfüggvényünkben szereplő *m paraméter tehát éppen a* ξ *változó várható értéke*. Mint látni fogjuk, a σ paraméter a ξ változó ún. szórását

adja meg. Megjegyzendő, hogy az előbb tulajdonképpen azon $\int_{-\infty}^{+\infty} x\, dF(x)$ *Stieltjes*-integrált számítottuk ki, ahol:

$$dF(x) = F'(x)\, dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx$$

volt.

3. Exponenciális eloszlás. *Sűrűségfüggvénye:*

$$f(x) = \frac{\lambda^k x^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda x},$$

ahol $x \geqq 0$, $\lambda > 0$ és k az exponenciális eloszlás *rendszáma*. Ekkor:

$$M(\xi) = \int_0^\infty \frac{\lambda^k x^k}{(k-1)!} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda(k-1)!} \int_0^\infty u^k e^{-u} du = \frac{k!}{\lambda(k-1)!} = \frac{k}{\lambda},$$

k-szori parciális integrálás, illetve egyszerű rekurzív képlet alkalmazásának eredményeként. Ha a rendszám $k = 1$, akkor $M(\xi) = \frac{1}{\lambda}$. E speciális exponenciális eloszlás fontos szerepet játszik a *radioaktív bomlás*nál. (Vö. az A V* 2. § 3. példával!)

β_5) Fentebb az $F(x)$ eloszlásfüggvényű ξ valószínűségi változó $M(\xi)$ várható értékét tanulmányoztuk. Most vizsgáljuk meg, hogyan alakul a ξ *valószínűségi változó* $\eta = \eta(\xi)$ *függvényének várható értéke, amennyiben az* η *változó* $G(y)$ *eloszlásfüggvényű.* Az

$$M(\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} y\, dG(y)$$

Stieltjes-integrálról van tehát szó. Ki lehet mutatni,* hogy ezt az integrált az x és $F(x)$ segítségével a következő módon lehet kifejezni:

$$M(\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dF(x).$$

E Stieltjes-integrál szolgáltatja tehát az $F(x)$ eloszlásfüggvényű ξ valószínűségi változó $\varphi(\xi)$ függvényének várható értékét. Ezen integrál *speciális eseteire* értelemszerűen a β_2)-ben mondottak érvényesek. Lássunk egy példát!

Példa

4. A Maxwell-féle sebességeloszlás középértékei. A gázmolekulák *Maxwell*-féle sebességeloszlásának a 10. § d) γ) 4. példában megismert

$$f(v) = \frac{4h^3}{\sqrt{\pi}} v^2 e^{-h^2 v}$$

* L. pl. monoton növekvő $\varphi(x)$-re: Боев i. m. 125—126. o.

sűrűségfüggvényének felhasználásával *állapítsuk meg a gázmolekulák v sebességének és* (a kinetikai energiájukkal arányos) v^2 *sebességnégyzetének középértékét* (várható értékét)!

Esetünkben:

$$dF(v) = F'(v)\,dv = f(v)\,dv = \frac{4h^3}{\sqrt{\pi}} v^2 e^{-h^2v^2}\,dv.$$

Eszerint:

$$\overline{V} = M(V) = \frac{4h^3}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty v^3 e^{-h^2v^2}\,dv = \frac{2}{h\sqrt{\pi}} \int_0^\infty h^2v^2 \cdot e^{-h^2v^2} \cdot 2h^2v\,dv =$$

$$= \frac{2}{h\sqrt{\pi}} \int_0^\infty ue^{-u}\,du = \frac{2}{h\sqrt{\pi}} \left\{ \left[-ue^{-u} \right]_0^\infty - \left[e^{-u} \right]_0^\infty \right\} = \frac{2}{h\sqrt{\pi}};$$

továbbá:

$$M(V)^2 = \frac{4h^3}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty v^4 e^{-h^2v^2}\,dv = \frac{4}{h^2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty u^4 e^{-u^2}\,du = \frac{2}{h^2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty u \cdot u^2 e^{-u^2} \cdot 2u\,du =$$

$$= \frac{2}{h^2\sqrt{\pi}} \left\{ -\left[u(u^2e^{-u^2} + e^{-u^2}) \right]_0^\infty + \int_0^\infty u^2 e^{-u^2}\,du + \int_0^\infty e^{-u^2}\,du \right\} =$$

$$= \frac{2}{h^2\sqrt{\pi}} \left[0 + \frac{\sqrt{\pi}}{4} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right] = \frac{2}{h^2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{3\sqrt{\pi}}{4} = \frac{3}{2h^2}.$$

Az integrálást *parciálisan* végeztük a régebben megismert

$$\int_0^\infty e^{-u^2}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \qquad \int_0^\infty u^2 e^{-u^2}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \quad \text{és az} \quad \int_0^\infty ue^{-u}\,du = -(u+1)e^{-u} + C$$

eredmények felhasználásával.

A két középérték láthatóan nem egyenlő!

γ) Szórás. Példák

γ_1) Egy ξ valószínűségi változó $M(\xi)$ várható értéke — mint tudjuk — megadja azt a középértéket, amely körül a változó véletlen ingadozásokat végez; ugyanakkor nem ad felvilágosítást ezen ingadozások nagyságáról. Ez utóbbi jellemzésére a $\delta(\xi) = M[\,|\,\xi - M(\xi)\,|\,]$ kifejezés értéke volna használható, azonban ez matematikailag nehezen kezelhető. {A β_3)-ban láttuk, hogy maga az $M[\xi - M(\xi)] = 0$.} Helyette a ξ *változó* $M(\xi)$ *körüli ingadozásának mértékéül a* $\xi - M(\xi)$ *eltérés négyzete várható értékének pozitív négyzetgyökét tekintik, s e mennyiséget a* ξ *valószínűségi változó szórásának nevezik.* Betűkkel:

$$\sigma(\xi) = \sqrt{M[(\xi) - M(\xi)]^2}.$$

Magát az $M[(\xi) - M(\xi)]^2$-értéket *szórásnégyzet*nek nevezik és $\sigma^2(\xi)$-vel jelölik.

A szórás fogalma *alapvető* a valószínűségszámítás szempontjából, mert termékenynek bizonyult olyan összefüggések feltárásában, amelyek a problémák lényegéhez tartoznak.

γ_2) Megemlítjük *a szórás egy-két* (igazolható) *tulajdonságát:*

a) $\sigma^2(\xi) = M(\xi^2) - [M(\xi)]^2$;

b) $\sigma^2(\xi) = M[(\xi - A)^2] - [M(\xi - A)]^2$,

ahol A egy tetszőleges szám. Megjegyzendő, hogy *e tétel a mechanikának a másodrendű nyomatékok számításánál szereplő Steiner-tételével* (l. a 7. §-ban) *rokon,*

c) A *b)*-ből következik, hogy

$$M[(\xi - A)^2] \geqq \sigma^2(\xi),$$

amely *a Steiner-tétel azon következményével analóg, miszerint a másodrendű nyomaték a súlyponti tengelyre minimális.*

d) A γ_1)-ben említett $\delta(\xi) = M[\,|\,\xi - M(\xi)\,|\,]$ ún. *várható eltérés* és a $\sigma(\xi)$ szórás viszonya:

$$\delta(\xi) \leqq \sigma(\xi).$$

Az egyenlőség a triviális $\xi = \text{const}$ eseten kívül is fennállhat.

γ_3) *Az $F(x)$ eloszlásfüggvényű ξ változó $\sigma^2(\xi)$ szórásnégyzetének kiszámítása* — a fentebbi definíció alapján — igazolhatóan a következő *Stieltjes-integrál segítségével* történik:

$$\sigma^2(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - M(\xi)]^2 \, dF(x).$$

A szórás mechanikai analogonja láthatóan az egyenes menti tömegeloszlásnak az x_s *súlypontjától számított inerciasugara.* A képletből világos, hogy *egyforma eloszlású ξ valószínűségi változók szórásai egyenlők.*

Az előbbi képlet — a γ_2) *a)* értelmében — még a

$$\sigma^2(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \, dF(x) - \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x \, dF(x)\right]^2$$

alakban is írható.

Diszkrét, illetve folytonos eloszlású változók esetén e képletek ilyen alakot öltenek:

$$\sigma^2(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i [x_i - M(\xi)]^2,$$

vagy

$$\sigma^2(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i x_1^2 - \left[\sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i\right]^2;$$

illetve

$$\sigma^2(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - M(\xi)]^2 f(x) \, dx,$$

vagy

$$\sigma^2(\xi) \leqq \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx - \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx\right]^2.$$

Előfordulhat, hogy ezek valamelyike *divergens;* ilyenkor azt mondjuk, hogy a ξ szórása ∞.

A várható eltérés kiszámítása igazolhatóan a

$$\delta(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x - M(\xi)|\,dF(x)$$

Stieltjes-integrállal lehetséges.

Példák

γ) Néhány eloszlás szórása.

1. Normális eloszlás. Amint a β_1) 2. példában láttuk, $M(\xi) = m$. Ezzel a *szórásnégyzet:*

$$\sigma^2(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - M(\xi)]^2 f(x)\,dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\,dx.$$

Bevezetve az $\frac{x-m}{\sigma} = t$ *új változót,* nyerjük:

$$\sigma^2(\xi) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$$

Az $u = t$, $v' = te^{-\frac{t^2}{2}} = e^{-w}w'$ választással *parciálisan* integrálunk:

$$\sigma^2(\xi) = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\left\{\left[-te^{-\frac{t^2}{2}}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt\right\} = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\left[0 + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{2}\right] = \sigma^2,$$

vagyis az $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ sűrűségfüggvényben szereplő σ *paraméter éppen a szórást adja.* Eredményeink alapján *tetszőleges m várható értékű és σ szórású normális eloszlás sűrűségfüggvényét felírhatjuk.*

Összehasonlításul számítsuk ki a *várható eltérést* is:

$$\delta(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x-M(\xi)|f(x)\,dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}|x-m|e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\,dx=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}|t|e^{-\frac{t^2}{2}}=$$

$$=\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}te^{-\frac{t^2}{2}}\,dt=\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-u}\,du=\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\left[e^{-u}\right]_{\infty}^{0}=$$

$$=\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}\neq\sigma(\xi)=\sigma.$$

2. Exponenciális eloszlás. Amint a β_3) 3. példában láttuk, elsőrendű ($k=1$) eloszlás esetén *a sűrűségfüggvény és a várható érték:*

$$f(x)=\lambda e^{-\lambda x},\qquad (x\geqq 0,\ \lambda>0)\quad\text{és}\quad M(\xi)=\frac{1}{\lambda}.$$

Ezek felhasználásával *a szórásnégyzet:*

$$\sigma^2(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\,dx-[M(\xi)]^2=\lambda\int_0^{\infty}x^2e^{-\lambda x}\,dx-\frac{1}{\lambda^2}=$$

$$=\frac{1}{\lambda^2}\left[\int_0^{\infty}t^2e^{-t}\,dt-1\right]=\frac{1}{\lambda^2}[2-1]=\frac{1}{\lambda^2};$$

közben *kétszer parciálisan* integráltunk. *Az exponenciális eloszlásnál tehát a szórás és a várható érték számszerűen megegyezik.*

A várható eltérés pedig:

$$\delta(\xi)=\int_0^{\infty}\left|x-\frac{1}{\lambda}\right|\lambda e^{-\lambda x}\,dx=\lambda\int_0^{1/\lambda}\left(\frac{1}{\lambda}-x\right)e^{-\lambda x}\,dx+\lambda\int_{1/\lambda}^{\infty}\left(x-\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda x}\,dx.$$

Parciális integrálás után nyerjük végül:

$$\delta(\xi)=\frac{2}{e\lambda}=\frac{2}{e}\sigma(\xi).$$

3. Poisson-eloszlás. A β_4) 1. példa szerint $M(\xi)=\lambda$. Ezzel *a szórás:*

$$\sigma^2(\xi)=\sum_{i=0}^{\infty}p_ix^2-[M(\xi)]^2=\sum_{i=0}^{\infty}i^2\frac{\lambda^ie^{\lambda}}{i!}-\lambda^2=\lambda\sum_{i=1}^{\infty}[(i-1)+1]\frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)}e^{-\lambda}-\lambda^2=$$

$$=\lambda^2e^{-\lambda}\sum_{i=2}^{\infty}\frac{\lambda^{i-2}}{(i-2)!}+\lambda e^{-\lambda}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!}-\lambda^2=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda,$$

azaz:

$$\sigma(\xi)=\sqrt{\lambda}=\sqrt{M(\xi)}.$$

EREDMÉNYTÁR

7. §. Első- és másodrendű nyomaték stb.

c)

α | **7.** $x_s = \frac{a}{3}$; $y_s = \frac{b}{3}$.

8. A háromszög alakja a fenti feltételek mellett tetszőleges! A koordináta-rendszer kezdőpontja legyen az alap egyik végpontjában, az x tengely essék egybe az alappal. Speciálisan választva a háromszög alakját, a számítás egyszerűvé tehető. $M_a = \frac{h^2 a}{6}$.

9. A befogókra: $M_b = \frac{a^3}{6}$; az átfogóra: $M_a = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

10. $y_s = \frac{m}{3}\,\frac{a+2b}{a+b}$.

11. $x_s = \frac{4}{5}$; $y_s = \frac{2}{7}$.

12. $x_s = \frac{5}{12}$; $y_s = \frac{5}{9}$.

13. $x_s = \frac{5}{6}$; $y_s = \frac{5}{18}$.

14. $x_s = 2{,}16$; $y_s = 0{,}27$.

15. $x_s = 1{,}65$; $y_s = 0{,}24$.

16. $y_s = 0{,}6$.

17. $y_s = 2{,}16$.

18. $x_s = x_1 - a\sqrt{\frac{y_1 - b}{y_1 + b}}$; $y_s = \frac{1}{4}\left(y_1 + \frac{b^2 x_1}{a\sqrt{y_1^2 - b^2}}\right)$.

19. $x_s = \frac{1}{e^{\frac{x_1}{a}} - 1} + 1 - a$; $y_s = \frac{b}{4a}\left(e^{\frac{x_1}{a}} + 1\right)$.

20. $M_x = \frac{b^2}{6a^2}(x_1^3 - 3a^2 x_1 + 2a^3)$; $M_y = \frac{a^2 y_1^3}{3b^2}$.

21. $x_s = \frac{3}{5}x_1$; $y_s = \frac{3}{8}y_1$.

22. A súlypont a parabolaszelet szimmetriatengelyén van. Először írjuk fel a 255. ábra szerinti elhelyezésben a parabola egyenletét. — A súlypont ordinátája:

$$y_s = \frac{2}{5}h.$$

23. $x_s = 1{,}56$; $y_s = 0{,}28$.

24. S_1 koordinátái: $x_{s_1} = \frac{3}{8}a$; $y_{s_1} = \frac{3}{5}b$;

S_2 koordinátái: $x_{s_2} = \frac{3}{4}a$; $y_{s_2} = \frac{3}{10}b$.

25. $x_s = \frac{a}{5}$; $y_s = \frac{a}{5}$.

26. $x_s = \frac{\pi}{2}$ (a szimmetria miatt nyilvánvaló); $y_s = \frac{\pi}{8}$.

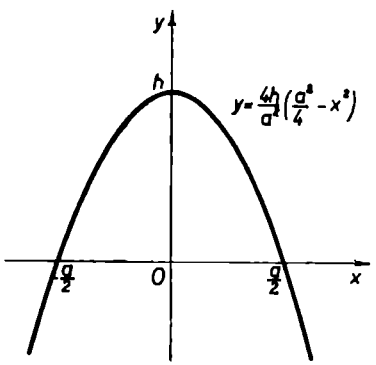
27. $M_x = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{5}$.

28. $M_x = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}$.

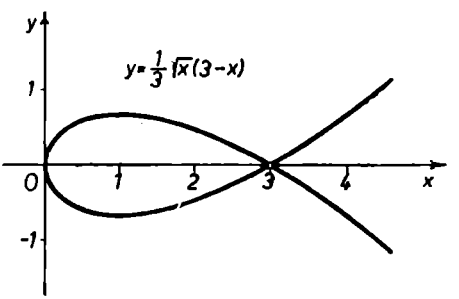
29. $M_x = \frac{3}{20}$.

30. $x_s = \frac{5}{8}a$; $y_s = 0$.

31. $x_s = \frac{9}{14} = 0{,}643$; $y_s = 0$. A függvény görbéje a 256. ábrán látható.



255. ábra



256. ábra

32. $\int_a^b (ax+b)f(x)\,dx = b\int_a^b f(x)\,dx + a\int_a^b x f(x)\,dx$; de $\int_a^b x f(x)\,dx$ nem egyéb, mint az $f(x)$ görbe alatti területnek az $[a, b]$ szakaszon az y tengelyre vonatkozó statikai nyomatéka; a súlyponti definíció szerint ez éppen $\xi \int_a^b f(x)\,dx$-szel egyenlő (mert a súlypontba képzelhetjük összesítve a tömeget). Ebből következik a *Verescsagin*-szabály. q. e. d.

36. $M_x=\frac{a^3}{30}(e^{3\pi}+1)$; $M_y=-\frac{a^3}{10}(e^{3\pi}+1)$; $\varphi_s=\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right)$

(a negatív jel onnan adódik, hogy a $(0,\pi)$ szektor súlypontja az y tengelytől balra esik).

37. $x_s=y_s=\frac{256a}{315\pi}$.

38. A súlypont a szektor szimmetriatengelyén fekszik; válasszuk ezt x tengelynek és a kör középpontját origónak. Ekkor:

$$x_s=\frac{2}{3}\,\frac{a\sin\alpha}{\alpha}.$$

39. $x_s=\frac{\sqrt{2}}{8}\pi a$; $y_s=0$.

β

4. Az idevonatkozó formula értelmében $\varphi_s=\operatorname{arctg}\frac{M_x}{M_y}=\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right)$; továbbá:

$$r_s=\frac{1}{S}\sqrt{M_x^2+M_y^2}=\frac{1}{\sqrt{2}\,a(e^{\pi}-1)}\sqrt{10}\,\frac{a^2}{5}(e^{2\pi}-1)=\frac{\sqrt{5}\,a(e^{2\pi}-1)}{e^{\pi}-1}=\sqrt{5}\,a(e^{\pi}+1).$$

7. A súlypont a középponti szög felezőjén fekszik (hiszen ez szimmetriatengely); válasszuk ezt x tengelynek, a kör középpontját pedig origónak. Így: $x_s=a\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}$.

8. $M_x=\frac{b^2}{a^2}+\frac{ab}{2\varepsilon}\arcsin\varepsilon$, ahol ε az ellipszis excentricitása.

9. $y_s=a\,\frac{e^4+4e^2-1}{4e(e^2-1)}$ (x_s nyilvánvalóan 0).

10. A felső ágra: $x_s=y_s=\frac{8}{5}a$.

γ

5. $M=\frac{\pi a^2}{4b^2}y_1^4$; $x_s=\frac{3}{4}\left(x_1+\frac{a^2}{x_1+2a}\right)$. **6.** $x_s=0{,}8199a$.

9. $x_s=\frac{5}{3}$. **10.** $x_s=\frac{7}{8}$.

11. $x_s=\frac{5}{16}$. **12.** $x_s=1{,}39$.

13. $x_s=\frac{a^2+a\operatorname{sh}2a-\operatorname{sh}^2a}{2a+\operatorname{sh}2a}$. **14.** $x_s=\frac{3}{4}\cdot\frac{a^4-2a^2+1}{a^3-3a+2}$.

15. $x_s=1{,}47$. **16.** $y_s=\frac{2}{3}a$. **17.** $y_s=\frac{5}{8}a$.

18. $y_s=\frac{3}{\ln 4}\approx 2{,}16$. **19.** $y_s=\frac{3}{4}\cdot\frac{2a+a^3}{a^2+3}$.

δ

6. $x_s=1{,}15$. **7.** $x_s=1{,}68$. **8.** $x_s=\frac{117}{80}$.

Műszaki alkalmazások

3. $y_s = 34{,}4$ cm. 4. $x_s = 8{,}44$ cm; $y_s = 25{,}8$ cm.

6. $y_s = \dfrac{h^2 + \delta(b-\delta)}{2(h+b-\delta)}$.

d)

4. $V = \dfrac{9}{2}\pi a^3$. 5. $V = 6\pi^2 ab^2$.

6. $V = \dfrac{3\sqrt{2}}{8}\pi^2 a^3$; $F = 32\pi^2 a^2$. 7. $V = 12\pi^3 a^3$; $F = 32\pi^2 a^2$.

8. A köbtartalom akkor a legnagyobb, ha a forgástengely az átlóra merőleges.

9. A forgástengelynek a középvonalra merőlegesnek kell lennie.

e)

α | 10. *a)* $I_a = \dfrac{ab}{12}$; *b)* $I_a = \dfrac{am^3}{12}$.

11. $I_k = \dfrac{(a+3b)m^3}{48}$; $I_{szt} = \dfrac{m}{48}(a^3 + a^2 b + ab^2 + b^3)$.

12. $I_x = I_y = \dfrac{3}{35}$. 13. $I_x = \dfrac{a^7}{21}$; $I_y = \dfrac{a^6}{5}$.

14. $I_x = \dfrac{a^{10}}{30}$; $I_y = \dfrac{a^6}{6}$. 15. $I_x = \dfrac{1}{12}$; $I_y = \dfrac{3}{2}$.

16. $I_x = \dfrac{3}{10}a^{\frac{10}{3}}$; $I_y = \dfrac{a^2}{6}$. 17. $I_x = \dfrac{2}{15}a^{\frac{5}{2}}$; $I_y = \dfrac{2}{7}a^{\frac{7}{2}}$.

18. $I_x = \dfrac{4}{7}a^{\frac{7}{2}}$; $I_y = \dfrac{4}{15}a^{\frac{5}{2}}$.

β | 5. $I = \dfrac{l^3}{3}$. 6. $I = \pi R^3$. 7. $I = \dfrac{l^3}{3}\sin^2\alpha$.

γ | 5. $I = \dfrac{8\pi R^3}{15}$.

δ | 3. $I = \dfrac{8\pi}{3}R^4$.

ε—ζ | 7. $I = \dfrac{r^4\pi}{4} + r^2 \cdot r^2\pi = \dfrac{5r^4\pi}{4}$.

8. $I = \dfrac{3}{2}a^3 + a^2 \cdot 6a = \dfrac{15a^3}{2}$.

9. $I = \dfrac{r^4\pi h}{2} + r^2 \cdot r^2\pi h = \dfrac{3}{2}r^4\pi h$.

10. $I = \dfrac{8}{3}\pi R^4 + R^2 \cdot 4R^2\pi = \dfrac{20R^4\pi}{3}$.

Műszaki alkalmazások

8. $E=\dfrac{sl^3\omega^2\gamma}{6}\approx 4{,}1\cdot 10^7$ erg $\approx 0{,}418$ mkp.

9. $E=\dfrac{ab^3\,d\gamma\omega^2}{6}\approx 1{,}16$ mkp.

10. $E=\dfrac{ah^3\,d\omega^2\gamma}{24}\approx 0{,}05$ mkp.

11. $E=\dfrac{ha^3\,d\omega^2\gamma}{60}\approx 0{,}015$ mkp.

12. $E=\dfrac{\pi r^4 h\omega^2\gamma}{4}$ erg (r és h cm-ekben, γ p/cm^3-ben, ω 1/s-ban mérve).

13. $E=\dfrac{Mr^2\pi^2n^2}{3600}$ erg, illetve $E=\dfrac{Mr^2(3\pi-8)\pi n^2}{3600}$ erg, ahol r cm-ben, M grammokban értendő.

14. $I_x=6467$ cm^4; $W_x\approx 646{,}7$ cm^3.

15. $n=\sqrt[4]{0{,}2}\approx 0{,}45$.

17. $I_y=9{,}54$ cm.

19. $I=\dfrac{F}{6}(b^2+bc+c^2)$.

21. $I_1=\dfrac{1225}{3072}b^4$; $I_2=\dfrac{361}{21\,504}b^4$.

22. $I_{x_1}=0{,}63r^4$; $I_{x_2}=r^4\left[\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{4}{3}\dfrac{m}{r}+\dfrac{\pi m^2}{2r^2}\right]$.

23. $\eta_s=1{,}38$ cm; $I_x=43{,}3$ cm^4; $I_y=144{,}4$ cm^4; $I_\xi=75{,}7$ cm^4.

25. $I=611{,}8$ cm^4.

26. $I=r^4\left(\dfrac{\pi}{16}-\dfrac{4}{9\pi}\right)\approx 0{,}55r^4$.

27. $e=0{,}373r$; $I_x\approx 2{,}56r^4$; $I_y\approx 0{,}56r^4$.

28. $I=\dfrac{\pi}{16}(R^4-r^4)+\dfrac{2}{3}a(R^3-r^3)+\dfrac{\pi}{4}\pi a^2(R^2-r^2)$.

29. $I_x=\dfrac{\pi}{4}(R^4-r^4)+\dfrac{8}{3}a(R^3-r^3)+\pi a^2(R^2-r^2)+\dfrac{4}{3}a^3(R-r)$.

$I_y=\dfrac{3\pi}{4}(R^4-r^4)-\dfrac{2}{3}(R+r-a)(R^3-r^3)+\pi Rr(R^2-r^2)$.

30. $\eta_s=21{,}67$ cm; $I_x=107\,338$ cm^4; $I_y=117\,810$ cm^4.

32. 54-szer, ill. 24-szer.

36. $I_x\approx 77$ cm^4.

37. $I_x=98\,000$ cm^4.

39. $I_x=9033$ cm^4; $I_y=7983$ cm^4.

40. Egy L-vasra: $I_y = 154{,}3\ \text{cm}^4$; $I_x = 51{,}2\ \text{cm}^4$; $T = 15{,}59\ \text{cm}^2$; $y_0 = 1{,}64$ cm. A teljes idomra: $I_y' = 2I_y = 308{,}6\ \text{cm}^4$, és a *Steiner*-tétel szerint:

$$I_y' = 2[I_x + T(y_0 + 4)^2] = 1092{,}4\ \text{cm}^4.$$

41. $I_x' = I_y = 4[87{,}2 + 15{,}11(14{,}5 - 2{,}34)^2] = 9300\ \text{cm}^4$.

42. $I_x = 2(I_y + Fa^2) = 2(72{,}7 + 19{,}17 \cdot 4{,}7^2) = 994\ \text{cm}^4$.

44. $I \approx 44{,}6\ \text{cm}^4$.

f)

5. $A = p_0 l$; $\quad M_0 = \dfrac{p_0 l^2}{2}$; $\quad R(x) = -p_0(l - x)$;

$$M(x) = -\frac{p_0}{2}(l - x)^2; \qquad M_{\max} = M(0) = -\frac{p_0 l^2}{2}.$$

6. $A = \dfrac{p_0 l}{2}$; $\quad R(x) = -\dfrac{p_0}{2}\left(\dfrac{l - x}{l}\right)^2$;

$$M(x) = -\frac{p_0}{6}\,\frac{(l - x)^3}{l}; \qquad M_{\max} = M(0) = -\frac{p_0 l^2}{6}.$$

7. $A = B = \dfrac{p_0 l}{2}$; $\quad R(x) = p_0\left(\dfrac{l}{2} - x\right)$;

$$M(x) = -\frac{p_0 l^2}{2}\left(\frac{1}{6} - \frac{x}{l} + \frac{x^2}{l^2}\right);$$

$$M_{+\max} = M\left(\frac{l}{2}\right) = +\frac{ql^2}{24}, \qquad M_{-\max} = M(0) = M(l) = -\frac{p_0 l^2}{12}.$$

g)

11. A γ)-ban adott differenciálegyenletet oldjuk meg a 9. példa mintájára.

13. Mint a 11. példa.

14. Mint a 11. példa.

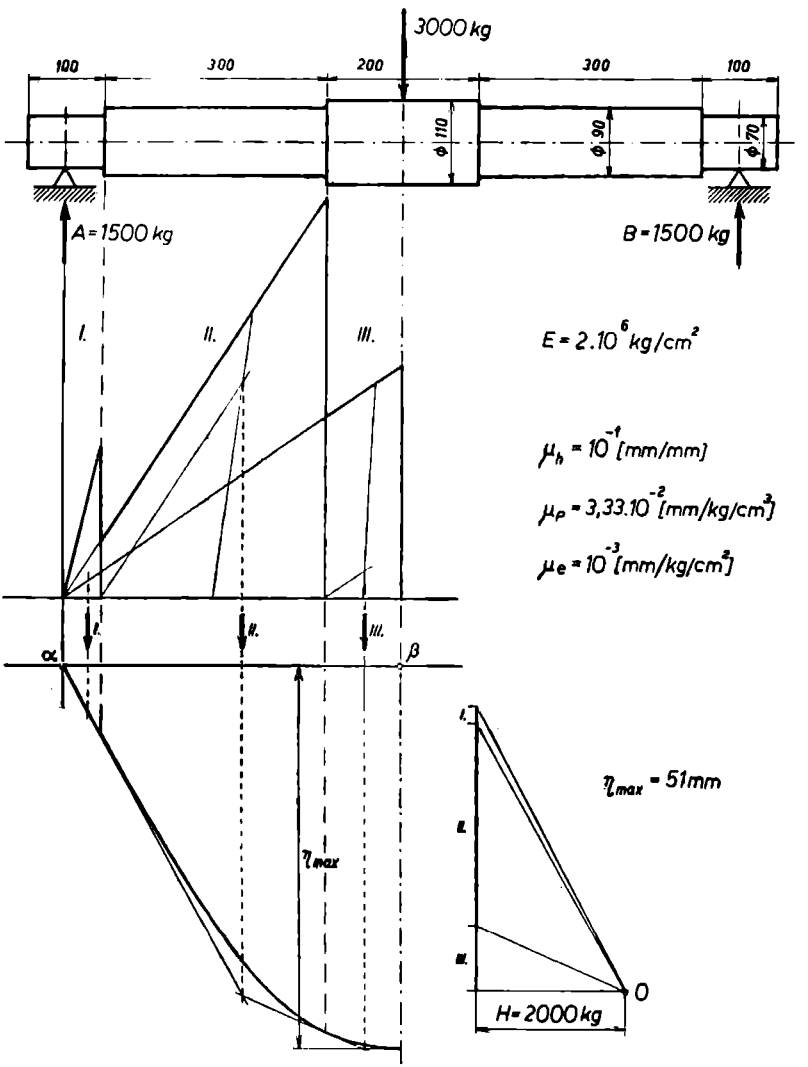
15. L. a 257. ábrát! $E = 2 \cdot 10^6\ \text{kg/cm}^2$; $\mu_h = 10^{-1}$ [mm/mm]; $\eta_p = 3{,}33 \cdot 10^{-2}$ [mm/kg/cm^3]; $\mu_l = 10^{-3}$ [mm/kg/cm^2]; $H = 2000\ \text{kg/cm}^2$.

$$t = y_{\max} = \frac{\eta_{\max} H}{\eta_h E} = \frac{51 \cdot 2 \cdot 10^3}{10^{-1} \cdot 2 \cdot 10^6} = 0{,}51\ \text{mm}.$$

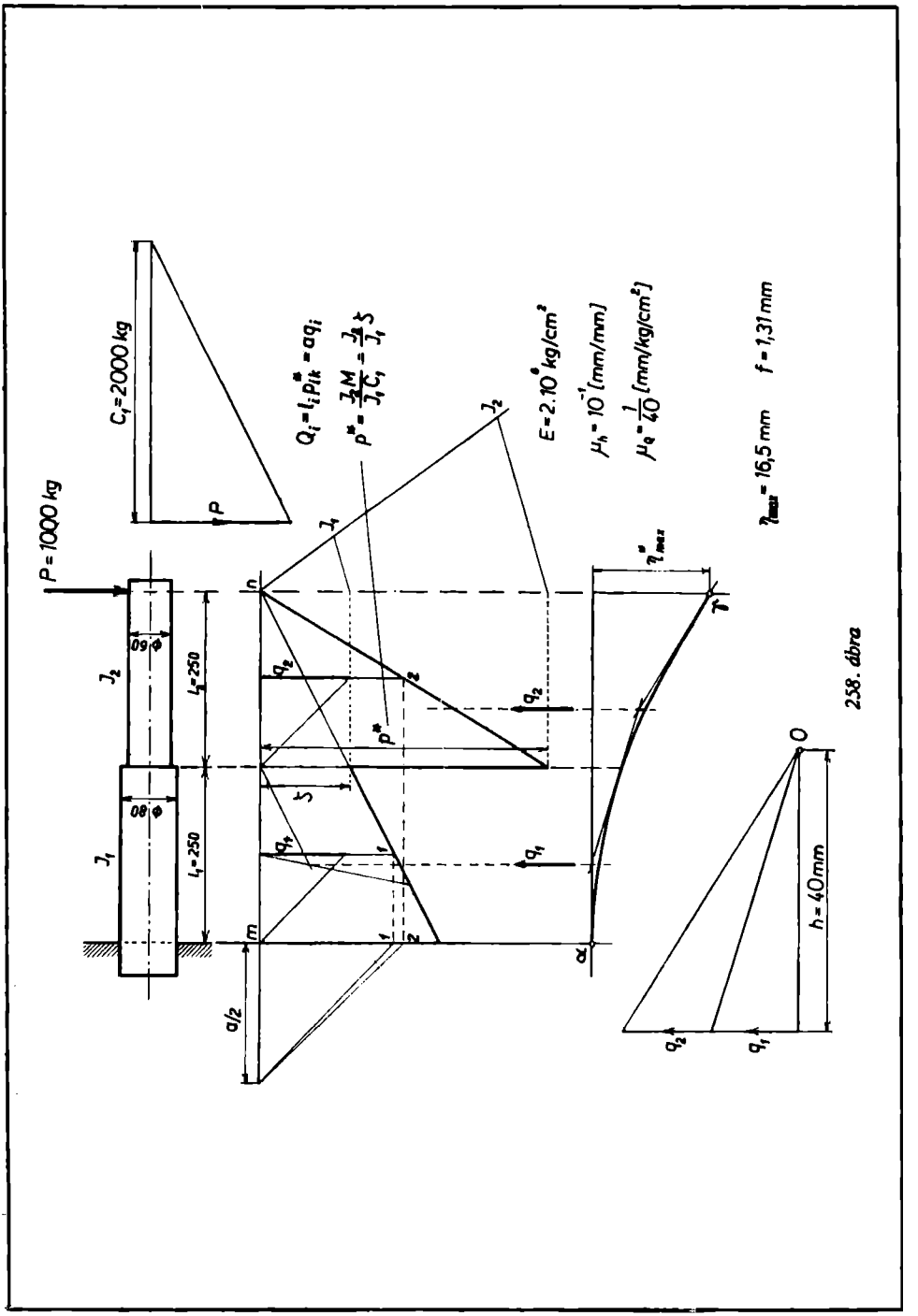
16. L. a 258. ábrát! $Q_i = l_i p_{ik}^* = aq_i$; $\quad p^* = \dfrac{MI_2}{C_1 I_1} = \dfrac{I_2}{I_1}\zeta \cdot E = 2 \cdot 10^6\ \text{kg/cm}^2$;

$\mu_h = 10^{-1}$ [mm/mm]; $C_1 = 2000$ kg; $I_2 = 201{,}1\ \text{cm}^4$; $\mu_Q = \dfrac{q_i}{Q_i} = \dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{40}$ [mm/kg/cm^2]; $h = 40$ mm; $\eta_{\max} = 16{,}5$ mm.

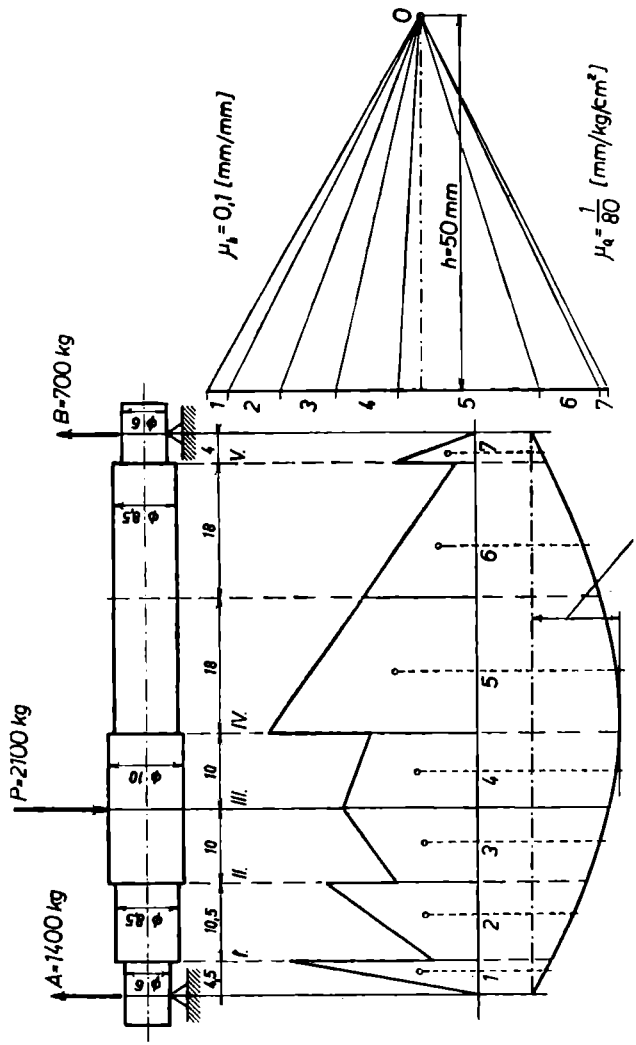
$$t = y_{\max} = \frac{C_1}{I_2}\,\frac{\eta_{\max}^* h}{\mu_Q \mu_h E} = \frac{2000}{201{,}1}\,\frac{16{,}5 \cdot 40}{2{,}5 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-1} \cdot 2 \cdot 10^{-6}} = 1{,}31\ \text{mm}.$$


3000 kg
100
300
200
300
100
φ 110
φ 90
φ 70
A = 1500 kg
B = 1500 kg
I.
II.
III.
E = 2.10^6 kg/cm^2
μh = 10^-1 [mm/mm]
μP = 3,33.10^-2 [mm/kg/cm^3]
μe = 10^-3 [mm/kg/cm^2]
α
β
ηmax
ηmax = 51mm
H = 2000 kg
0

257. ábra


P = 1000 kg
C₁ = 2000 kg
P
Q_i = l_i p*_ik = a q_i
p* = J₂M / J₁C₁ = J₂/J₁ ζ
E = 2.10⁶ kg/cm²
μ_h = 10⁻¹ [mm/mm]
μ_q = 1/40 [mm/kg/cm²]
η_max = 16,5 mm
f = 1,31 mm
J₂
J₁
l₂ = 250
l₁ = 250
Φ 60
Φ 80
n
m
q₂
q₁
p*
ζ
a/2
α
γ
η*_max
O
h = 40 mm

258. ábra


O
$\mu_s = 0{,}1$ [mm/mm]
h=50 mm
$\mu_q = \frac{1}{80}$ [mm/kg/cm²]
B=700 kg
P=2100 kg
A=1400 kg
η_{max} =11,5mm

259. ábra

17. L. a 259. ábrát! $\mu_h = 0{,}1$ [mm/mm]; $\mu_Q = \frac{1}{80}$ [mm/kg/cm²]; $h = 50$ mm; $\eta_{max} = 11{,}5$ mm;

$$y = \frac{h\eta}{\mu_h \mu_Q E} = \frac{50\eta}{0{,}1 \frac{1}{80} 2 \cdot 10^6} = \frac{\eta}{50};$$

$$f = y_{max} = \frac{\eta_{max}}{50} = \frac{11{,}5}{50} = 0{,}23 \text{ mm}.$$

	d cm	I cm⁴	M cmkg	$\frac{M}{I}$ kg/cm²	A területrészek		
					alapja cm	magassága kg/cm²	nagysága kg/cm²
I.	6 8,5	63,6 256,0	6 300 6 300	99,3 24,6	4,5	49,6	224
II.	8,5 10,0	256,0 490,8	21 000 21 000	82,0 42,9	10,5	53,3	561
III.	10,0	490,8	35 000	1,4	10,0	57,5	575
IV.	10,0 8,5	490,8 256,0	28 000 28 000	57,0 109,5	10,0 18,0	64,2 84,8	642 1530
V.	8,5 6,0	256,0 63,6	2 800 2 800	10,9 44,0	18,0 4,0	35,5 22,0	641 88

8. §. Egyéb nyomatékok stb.

α—β | **9.** $P = 10\,000$ t; $N = 333\,000$ tm.

10. Először számítsuk ki a keverék nyomóerejét, majd az m magasságú olajréteg nyomóerejét. Konstatálhatjuk, hogy az előbbi éppen 5-szöröse az utóbbinak.

11. Az egyenest a felszíntől számítva $\frac{b}{\sqrt{2}} \approx 17{,}7$ cm-nyi távolságban kell meghúzni.

12. $P = \frac{Q}{8} = 125$ t.

A retesz sorszáma felülről	1	2	3	4	5	6	7	8
Távolság felülről méterben	2,35	4,31	5,61	6,65	7,57	8,25	9,05	9,60

13. A nyomóerő kétszeresre növekszik.

14. $P = 362$ t; $\xi = 6{,}58$ m. **15.** $P = 16{,}8$ t; $\xi = 2{,}915$ m.

16. $P = 8420$ t; $\xi = 11{,}3$ m. **17.** $P = 4520$ t; $\xi = 11{,}78$ m.

18. $P = 330$ t; $\xi = 5{,}45$ m. **19.** $P = \frac{2}{3}\gamma a^2 b$.

γ | **4.** $x = 1{,}55$ m. **5.** $P = 1770$ t; $\alpha = 18° 15'$.

6. $P = 3{,}884\pi R^3\gamma$. **7.** $\sigma = 251$ kg/cm^2.

δ | **6.** $x = H\left[1 - \sqrt[3]{1 - \frac{\gamma_0}{\gamma}}\right] = 0{,}263\,H$. **7.** $b = a\left(\frac{3}{2}\frac{d^2}{D^3\gamma}p - 1\right)$.

8. $x \approx 7$ cm. **9.** $P = G + \frac{15}{8}\pi\gamma r^3$.

10. *a)* $L = \frac{\gamma^2 H^2 S}{2} = 32$ mkg; *b)* $L = \frac{1}{2}SH^2(1-\gamma)^2 = 2$ mkg.

b)

α | **11.** $T \approx 22{,}6$ óra. **12.** $f \approx 0{,}205$ cm^2.

13. *a)* $\tau \approx 33{,}2$ s; *b)* $T \approx 64{,}6$ s.

14. $\tau = \frac{2[(H+h)^{5/2} - h^{5/2}]}{5\mu h^2\sqrt{2g}}$.

15. $\tau = \frac{r^2}{\mu\varrho^2\sqrt{2g}}\left[2\sqrt{h_a + h_k} - \frac{8}{5}\sqrt{h_k} - \frac{2}{5}\left(\frac{x'}{h_k}\right)^2\sqrt{x'}\right]$.

16. $T = 1^{\text{h}}\,6'\,53''$.

17. $T = \frac{2bl\sqrt{2a}}{3f\sqrt{g}}(2\sqrt{2} - 1)$.

18. $T = \frac{V}{q_{\max}}\frac{4n+2}{4n+1}$. **19.** $T = 33{,}3$ óra.

β | **14.** *a)* $\tau = 2{,}4$ s; *b)* $\tau = 6{,}3$ s; *c)* $\tau = 53$ s; *d)* $T \to \infty$.

15. $q = 4\mu \operatorname{tg}\alpha\sqrt{2g}\left[\frac{2}{15}\left(H + \frac{2}{3}h\right)^{5/2} - \frac{1}{3}\left(H + \frac{2}{3}h\right)\left(H - \frac{2}{3}h\right)^{3/2} + \frac{1}{5}\left(H - \frac{2}{3}h\right)^{5/2}\right]$.

16. A pontos formula: $q = 2{,}0\,\mu a^2\sqrt{2ga}$.

A kis nyílásokra érvényes közelítő formula pedig: $q \approx 2{,}18\mu a^2\sqrt{2ga}$.

17. $q = 1{,}045\mu a^2\sqrt{2ga}$. **18.** $h_f = \frac{l}{2}\left(3 - \sqrt{\frac{11}{3}}\right) = 0{,}54$ l.

19. A β_1)-ben nagy oldalnyílásra adott képlet felhasználásával adódik.

20. $q = 4\mu \operatorname{ctg}\alpha\sqrt{2g}\left[\frac{2(h_f+m)^{5/2} - 2h_f^{5/2}}{15} - \frac{mh_f^{3/2}}{3} + b \operatorname{tg}\alpha\frac{(h_f+m)^{3/2} - h_f^{3/2}}{3}\right]$.

21. $q_1 : q_2 = 0{,}931$.

22. $q \approx \mu\pi R^2\sqrt{2gH}\left[0{,}75 - 0{,}0293\left(\frac{R_2}{H}\right)^2\right]$.

23. Folyadékrészecskék szabad eséséről van szó, $v = \sqrt{2gh_0}$ vízszintes kezdősebesség és m kezdeti magasság mellett $l = 4{,}35$ m.

γ | **7.** $q = 1{,}4$ m^3/s. **8.** $q = 5{,}93$ m^3/s. **9.** $q = 2{,}19$ m^3/s.

c)

α | **2.** $\omega = \frac{4}{D}\sqrt{gH}\ \mathrm{s}^{-1}$.

3. $p = \gamma\left[\frac{\omega^2}{2g}h(2R+h) - h\sin\omega t\right]$; $n = \frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{g}{R}}$.

4. $V = \pi R^2\left(H - \frac{\pi^2 n^2 R^2}{3600g}\right)$. **5.** $v = 63$ m/s.

6. $n = \frac{60g}{\pi(2R+a)}$.

β | **3.** $L = 353\,250$ mkg. **4.** $L = \frac{\pi d R^2 H^2}{4}$.

5. $L = \frac{\pi R^2 H^2 d}{6} \approx 26\,800$ mkg. **6.** $L = \frac{4}{15}abH^2 \approx 240$ mkg.

γ | **7.** $q = 1{,}29$ l/s. **8.** $q = 2{,}18$ l/s.

9. $q = 10{,}33$ l/s. **10.** $q = 9{,}33$ l/s.

11. $q = 0{,}0483$ l/s.

d)

Nehézségi erőtér

5. $P = 2\varkappa m\gamma$.

6. Az előző példa módjára számoljunk.

7. Először számítsuk ki a második rúd hatását az első rúd ds elemére, majd határozzuk meg a kölcsönhatás eredőjét.

$$P = \frac{\varkappa M^2}{l^2}\ln\frac{4}{3}.$$

8. $P = \frac{\varkappa mM}{a(a+l)}$; $M_0 = \frac{a+b}{a}M$; $L = \frac{\varkappa mM}{l}\ln\frac{r_1(r_2+l)}{r_2(r_1+l)}$.

9. $m = \int_0^{10}(6+0{,}3x)\,dx = 75$ kg s^2/m. **14.** $L \approx 1{,}63 \cdot 10^{11}$ mkg.

Elektromos erőtér

6. *a)* $L = 40$ erg; *b)* $L = 60$ erg. **7.** $r = 5$ cm.

Expandáló gáz munkája

2. $L \approx 3{,}4$ mkg. **3.** $L \approx 1600$ mkg.

4. Először írjuk fel a BC görbe egyenletét, felhasználva a B pont koordinátáinak ismeretét. $T \approx 662$ mm^2.

5. $p \approx p_1 v_1 / v$, $v_1/2 \leqq v \leqq v_1$; $L = 1740$ kg.

6. A rugalmas testekre érvényes *Hooke*-törvény szerint: $P = \frac{FE}{l}\lambda$, ahol most $\frac{FE}{l} = 1$. mert $P = 1$ esetén $\lambda = 1$. A kérdezett munka tehát:

$$L = \int_0^{\lambda_1} P(\lambda)\, d\lambda = \int_0^{10} \lambda\, d\lambda = 50 \text{ cmkg}.$$

9. §. Integrálás végtelen sorok segítségével

b)

β | **7.** $I = 1 - 0{,}25 + 0{,}01388 - 0{,}00034 + - \ldots = 0{,}7635$.

8. $I = 0{,}071$. **9.** $I = 0{,}0214$. **10.** $I = 0{,}9226$.

11. $I = 0{,}94608$. **12.** $I = 1{,}03065$. **13.** $I = -0{,}1026$.

14. $I = 0{,}0201$.

15. $I = 0{,}3103$.

16. $I = x - \frac{x^5}{2!5} + \frac{x^9}{4!9} - \frac{x^{13}}{6!13} + - \ldots$ **17.** $I = 0{,}937$.

24. $s = 2\pi a\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 e^2 - \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \frac{e^4}{3} - \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 \frac{e^6}{5} - \ldots\right]$.

10. §. Improprius integrálok

a)

α | α_1) **7.** $I = \frac{1}{3}$.

8. Bontsuk fel az integrált részlettörtekre. $I = \ln 2 - \frac{1}{2}$.

9. $I = \frac{1}{(n-1)a^{n-1}}$.

α_2) **14.** $I = -\frac{1}{8}$.

15. Határozatlan, 0 és 2 között bármilyen értékű lehet.

16. Parciális törtekre bontva és integrálva: $I = 1 - \ln 2$.

17. Helyettesítsük x^2 helyébe u-t.

$$I = -\frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-u}\,du = \lim_{u\to\infty}\frac{1}{2}(1-e^{-u}) = \frac{1}{2}.$$

18. $x^2 = t$ helyettesítéssel, majd parciálisan integrálva: $I = \frac{1}{2}$.

19. A 10. példához hasonlóan számolva: $I = \frac{a}{a^2+b^2}$.

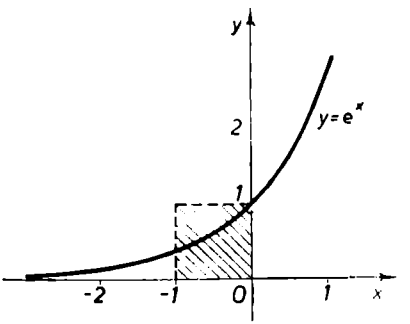
20. $x = t^2$ helyettesítéssel, majd parciális törtekre bontva: $I = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2}$.

21. $x = u^2$ helyettesítés, majd parciális integrálás után: $I = 2$.

22. Az integrál divergens.

23. $I = \left[e^x\right]_{-\infty} = 1 - \lim_{x\to-\infty} e^x = 1 - 0 = 1$.

A szóban forgó, végtelenbe nyúló terület tehát egyenlő a 260. ábrán vonalkázással feltüntetett (egységoldalú) négyzet területével.



260. ábra

b)

α

4. $I = \frac{\pi}{2}$.

5. $I = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\sqrt{2r}\cdot 2\sqrt{x}\right]_{\varepsilon}^{2r} = 4r$.

6. $I = r\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\arcsin\frac{x}{r}\right]_0^{r-\varepsilon} = \frac{r\pi}{2}$.

7. Parciális integrálással nyerjük: $I = -\frac{1}{9}$.

14. $I = \frac{8}{3}$. **15.** $I = \frac{\pi}{3}$. **16.** $I = -\frac{1}{4}$.

17. $I = 8r$. **18.** $I = \pi$.

β

9. Az integrál divergens, mert az $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x+1} \leqq I$ (minoráns) lévén, $\sin^2 x \leqq 1$, és így $\frac{1}{x+\sin^2 x} \geqq \frac{1}{x+1}$. Tehát:

$$I \geqq \int_1^{\infty}\frac{dx}{1+x} = \ln\left[x+1\right]_1^{\infty} = \infty.$$

10. Az integrál konvergens, ugyanis $0 \leqq I \leqq \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$.

11. Az integrál divergens, mert $I \geqq \int_0^\infty \frac{dx}{x+1+x} = \left[\ln \sqrt{x+\frac{1}{2}}\right]_0^\infty = \infty$.

c)

γ **5.** $I_n = \frac{n!}{a^{n+1}}$.

FÜGGELÉK

11. §. Paraméteres integrálok

c)

β **16.** $I = \frac{b}{8a^4}\left\{\frac{5a^2+3b^2}{(a^2+b^2)^2} + \frac{3}{ab}\operatorname{arctg}\frac{b}{a}\right\}$.

γ **3.** Integrálva az u paraméter szerint α és β határok között:

$$I = \ln\frac{1+\beta}{1+\alpha}.$$

4. $I = \ln(1+a)$. **5.** $I = \frac{1}{2}\ln(1+a)$.

[E két utóbbinál (az integrálásnál adódó) $C = 0$, lévén $a \to 0$ esetén $I \to 0$.]

FELHASZNÁLT IRODALOM

MATEMATIKAI

1. *Г. М. Фихтенгольц:* Курс дифференциального и интегралъного исчисления, том II и III; Огиз-Гостехиздат. 1948. Москва—Ленинград.

2. *A. F. Bermant:* Matematikai analízis I. rész; fordítás; Tankönyvkiadó, Budapest, 1951.

3. *Г. Н. Берман:* Сборник задач по курсу математического анализа изб. 3; Гостехиздат, 1951, Москва—Ленинград.

4. *H. M. Gjunter—R. O. Kuzmin:* Felsőbb matematikai példatár II. rész; fordítás; Tankönyvkiadó, Budapest, 1951.

5. *W. A. Granville—P. F. Smith—W. R. Longley:* Elements of the Differential and Integral Calculus, Rev. Edition; Ginn and Company, Boston, 1941.

6. *R. Schlömilch:* Aufgabensammlung zu Analisis II.

7. *Н. Н. Лузин:* Лнтегральное исчисление изд. 3; Советская наука, 1952, Москва.

8. *А. И. Погорелов:* Сборник задач по высшей математике; Учпедгиз, 1951, Москва.

9. *Б. П. Демидович:* Сборник задач и упражнений по математическому анализу; Гостехиздат, 1952 Москва—Ленинград.

10. *Szász Pál:* A differenciál- és integrálszámítás elemei I—II., 2. kiadás; Közoktatásügyi Kiadóvállalat, Budapest, 1951.

11. *Stachó Tibor:* Felsőbb mennyiségtan, 2. kiadás; Budapest, 1942.

12. *R. Rothe:* Höhere Matematik, Teil II. u. IV—3/4; 7-te, bzw. 4-te Auflage; B. G. Teubner, Leipzig, 1951, bzw. 1949.

13. *B. Baule:* Die Mathematik des Naturforschers und Ingenieurs, Band I; 7. Auflage: S. Hirzel, Leipzig, 1950.

14. *M. Lindow:* Integralrechnung; B. G. Teubner, Leipzig, 1951.

15. *Rényi Alfréd:* Valószínűségszámítás; Tankönyvkiadó Jegyzetsokszorosító Üzeme, Budapest, 1952.

16. *Г. П. Боев:* Теория вероятностей; Гостехиздат, 1950, Москва—Ленинград.

17. *Pachn:* Gyakorlatok *Gallai:* Matematika c. előadásához; Tankönyvkiadó Jegyzetsokszorosító Üzeme, Budapest, 1953.

18. *Alexits—Fenyő:* Matematika vegyészek részére; Tankönyvkiadó, Budapest, 1952.

MŰSZAKI

1. *Békéssy—Freud—Marx—Nagy:* Elméleti fizikai feladatok; Tankönyvkiadó, Budapest, 1951.

2. *Kövesi Antal:* Hidraulika és gyakorlati példák gyűjteménye; Népszava, Budapest, 1946.

3. *В. С. Яблонский—В. П. Яблонская:* Сборник задач по технической гидротехнике; Гостехиздат, 1951, Москва—Ленинград.

4. *Н. И. Иванов:* Сборник задач по сопротивлению материалов, изд. 11. Гостехиздат, 1951, Москва—Ленинград.

5. *Muttnyánszky Ádám:* Szilárdságtan I. és II. rész; Budapest, 1948.

6. *П. Л. Калантаров—Л. Р. Нейман:* Теоретические основы электротехники; изд. 3; Госэнергоиздат, 1951, Москва—Ленинград.

7. *Verebélÿ László:* Villamos művek I. és II. kt., 2. kiadás; Tankönyvkiadó, Budapest, 1952.

8. *Gruber—Blahó:* Folyadékok mechanikája; Tankönyvkiadó, Budapest, 1952.

9. *Verebélÿ—Csáki:* Villamos vasutak I. rész; Tankönyvkiadó Jegyzetsokszorosító Üzeme, Budapest. 1952.

10. *Szentmártony Tibor:* Matematikai statisztika a műszaki gyakorlatban; Tudományos Könyvkiadó N. V., Budapest, 1950.

11. *Menge—Schrieder:* Mechanik—Aufgaben III; Fachbuchverlag GMBH, Leipzig, 1951.

19. *В. И. Феодосев:* Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов; Гостехиздат, 1950, Москва—Ленинград.

13. *Németh—Muszkalay—Papházi—Szabó:* Csatornázás; Felsőoktatási Jegyzetellátó Vállalat, Budapest.

14. *Németh:* Ivóvízellátás; Tankönyvkiadó Jegyzetsokszorosító Üzeme, Budapest.

15. *Kézdi Árpád:* Talajmechanika I.; Tankönyvkiadó, Budapest, 1952.

16. *Németh:* Hidrológia; Tankönyvkiadó Jegyzetsokszorosító Üzeme, Budapest.

17. *Németh:* Mezőgazdasági vízhasznosítás; Tankönyvkiadó Jegyzetsokszorosító Üzeme, Budapest.

18. *Kézdy:* Földművek; Tankönyvkiadó Jegyzetsokszorosító Üzeme, Budapest.

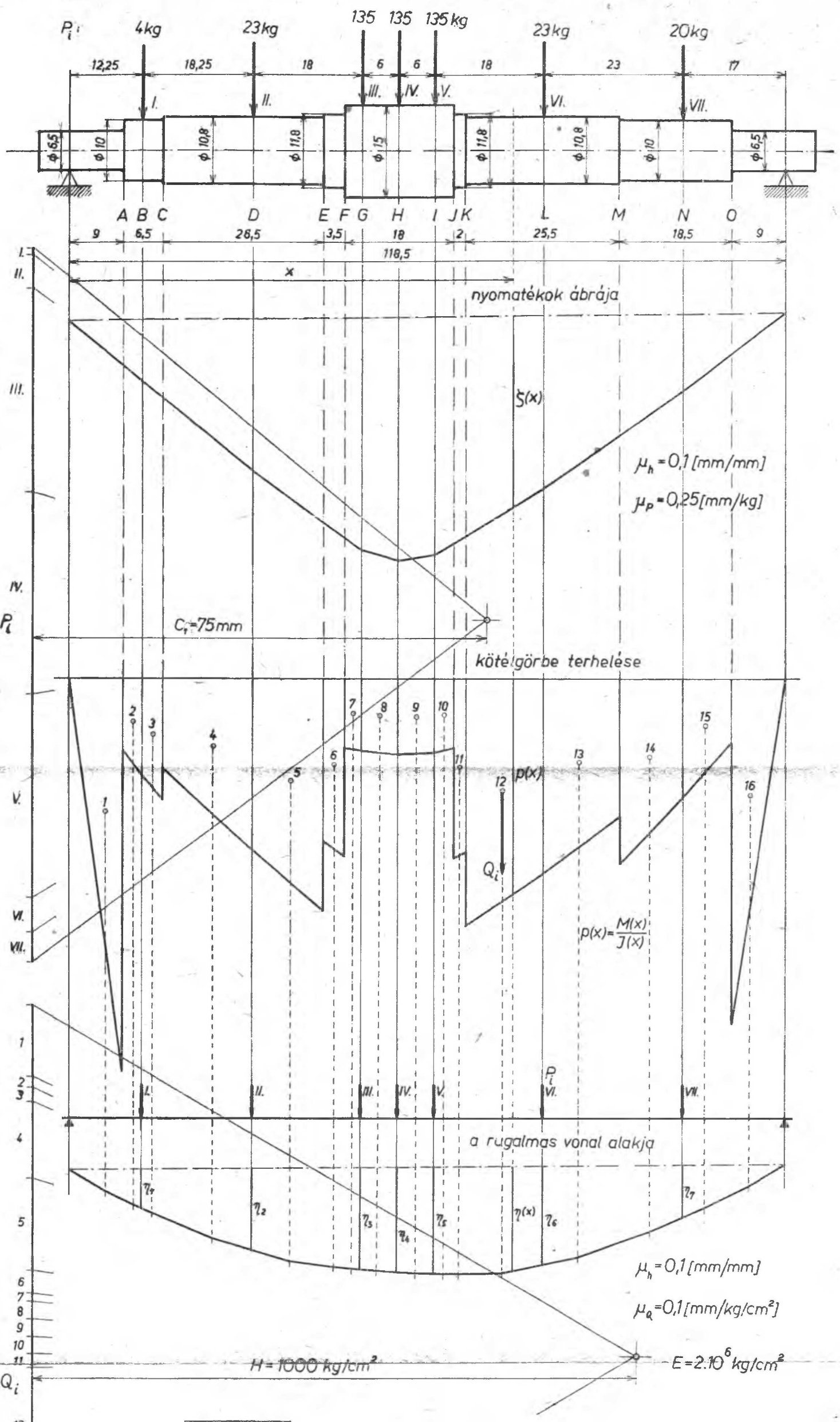
19. *Herrmann Miksa:* Gépelemek; Németh József, Budapest, 1924.

20. *К. А. Круг:* Основы электротехники; Госэнергоиздат, 1952, Москва—Ленинград.

21. *Széchy Károly:* Alapozás I—II.; Közlekedési Kiadó, Budapest, 1952.

22. *Pelikán:* Matematika építészmérnök hallgatók részére; Tankönyvkiadó Jegyzetsokszorosító Üzeme, Budapest.

A kiadásért felelős a Tankönyvkiadó igazgatója
Felelős szerkesztő: Ambrus Ferenc
Műszaki vezető: Hámori József
Műszaki szerkesztő: Hülber Péter
A kézirat nyomdába érkezett: 1974. január — Megjelent: 1974. október
Példányszám: 1700 — Terjedelem: 27,5 (A/5) ív, 260 ábra+1 tábla
Készült monószedéssel, íves magasnyomással, az 1966. évi második kiadás változatlan utánnyomásaként, az MSZ 5601—59 és az MSZ 5602—55 szabvány szerint
Raktári szám: 44 131/V.**
74.2515.66-16-2 Alföldi Nyomda, Debrecen



$$y = \frac{1}{200}\eta$$

I. táblázat.

	d	J	M	M/J	területrészek			
					alapja	red.mag.	nagys.	sz.
	cm	cm^4	cmkg	kg/cm^3	cm	kg/cm^3	kg/cm^2	–
A	6,5	88	2280	25,9	9	12,95	117	1
	10	491		4,65	3,25	5,48	17,8	2
B			3090	6,3				
C			3900	7,95	3,25	7,13	23,3	3
	10,8	668		5,84	15,0	8,57	128,3	4
D			7560	11,3				
E			10200	15,3	11,5	13,3	153,0	5
	11,8	952		10,7	3,5	11,2	39,2	6
F			11100	11,7				
	15	2485		4,47	3	4,55	14,2	7
G			11500	4,63				
H			12080	4,86	6	4,75	28,5	8
I			11820	4,76	6	4,82	29	9
J			11240	4,52	3	4,64	27,8	10
	11,8	952		11,8	2	11,66	23,3	11
K			10900	11,5				
	10,8	668		16,3	13	14,55	189	12
L			8550	12,8				
M			6000	9,0	12,5	10,59	132	13
	10	491		12,2	10,5	9,98	105	14
N			3810	7,76				
O			2000	4,08	8	5,92	47	15
	6,5	88		22,8	9	11,4	103	16

II. táblázat.

	P_i kg	η_i mm	$10^3 y_i$ cm	$10^2 P_i y_i$ kgcm	$10^4 P_i y_i^2$ $kgcm^2$
I.	4	6,2	3,1	1,24	0,38
II.	23	13,4	6,7	15,4	10,32
III.	135	16,8	8,4	113,2	95,02
IV.	135	17,2	8,6	116,0	99,80
V.	135	17,6	8,8	118,7	104,40
VI.	23	16,0	8,0	18,4	14,70
VII.	20	8,6	4,3	8,6	3,70
			Σ	391,54	328,32

99. ábra